Verzamelingenleer.

De voornaamste definities en stellingen zullen hier gegeven worden. Voor uitwerkingen volge men het college.

1. λ-notatie.

Zoals bekend is een functie F een verzameling geordende paren zodat $(x,y) \in F$ en $(x,z) \in F \Rightarrow y = z$.

Probleem: is "sin x" een functie, ja of nee?

Antwoord: nee, "sin x" is een term, d.w.z. een taalkundige uitdrukking, die door substitueren van b.v. "π" voor "x" overgaat in een naam "sin π" van het getal 0.

Toch lijkt "sin x" op een functie, nl. op de functie $F = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R} \wedge y = \sin x\}$. Par abus de language noemt men deze functie wel "sin x". We voeren nu een algemene notatie in, die van termen functies maakt.

1.1 Definitie. $F = \lambda x.t(x) \Leftrightarrow F(x) = t(x)$ voor alle x, waar t een term is en waar x tot een tevoren bepaald domein behoort.

$\lambda x.t(x)$ heet een λ-term.

Uit de definitie volgt de

1.2 $\boxed{\text{Conversieregel: } (\lambda x.t(x))(a) = t(a)}$

Vb. (1) $(\lambda x.\sin x)(\pi/2) = \sin \pi/2 = 1$.

(2) $(\lambda x.(x^2-7x+3))(1) = 1-7+3 = -3$.

Toepassingen. Laat $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dan $f+g = \lambda x.(f(x)+g(x))$

$f.g = \lambda x.(f(x).g(x))$

$\underset{\sim}{0} = \lambda x.0$ (de nulfunctie)

$\underset{\sim}{i} = \lambda x.x$ (de identiteit).

1.3 Iteratie. Stel $f : A \to B$ en t is een (geschikte) term, dan is $\lambda f.t(f)$ weer een afbeelding, maar nu van $B^A = \{f | f : A \to B\}$ in een nader te bepalen verzameling.

Vb. $\lambda f .f(0) : B^A \to B$

$(\lambda f.f(0)(i) = i(0) = 0$ (voor i zie boven).

Men kan de vorming van λ-termen willekeurig vaak herhalen.
<u>Vb.</u> $\lambda x.\lambda y.(x+y)$ is een afb. van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
(voegt aan getallen functies toe).

Voor functies met meer variabelen gebruikt men ook de λ-notatie:
$F = \lambda xy.t(x,y) \Leftrightarrow F(x,y) = t(x,y)$.
<u>Vb.</u> $+ = \lambda xy(x+y)$.

N.B. Onderscheid $\lambda xy.t(x,y)$ van $\lambda x.\lambda y.t(x,y)$.

2. <u>Paren en geordende paren</u>.

2.1 <u>Definitie</u>. We noemen de verzameling $\{a,b\}$ het <u>paar</u> a,b.
Merk op dat $\{a,b\} = \{b,a\}$.

2.2 <u>Definitie</u>. a heet <u>singleton a</u>.
Merk op dat "singleton" een bijzonder geval van "paar" is.

We zullen in het vervolg aannemen dat verzamelingen eenduidig door hun elementen worden vastgelegd. Dit is het Principe van EXTENSIONALITEIT

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

Merk op dat de pijl van links naar rechts triviaal is, immers gelijke dingen hebben precies dezelfde eigenschappen.

<u>Gevolg</u>: Bij iedere a en b is er precies één paar en
bij iedere a is er precies één singleton.
In symbolen
$\forall x \forall y\, \exists! z \forall w(w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y)$
$\forall x\, \exists! z \forall w(w \in z \Leftrightarrow w = x)$.
Bij een geordend paar wil men onderscheid aanbrengen tussen de "voorste" en de "laatste". D.w.z.

2.3 $(a,b) = (c,d) \rightarrow a = c \wedge b = d$,

dit in onderscheid tot

$$\{a,b\} = \{c,d\} \rightarrow (a = c \vee a = d) \wedge (b = c \vee b = d).$$

Om de eigenschap van 2.3 te bereiken kan men verschillende trucjes toepassen. In de praktijk geeft men de elementen een index (a_1, a_2). Datzelfde kan men in de verzamelingsleer bereiken door te stellen $a_1 = \{a,\#\}$, $a_2 = \{b,\flat\}$, waar $\#$ en $\flat$ twee "hele andere" elementen zijn (b.v. $\# = \alpha$ en $\flat = \beta$ als we met reële getallen a en b werken). en door het geordende paar te definiëren als

$$(a,b) = \{\{a,\#\},\{b,d\}\}.$$

Het bezwaar van deze definitie is dat we behalve a en b twee "vreemde" elementen nodig hebben.

Een handiger definitie van geordende paar is als volgt (Kuratowski, 1921)

2.4 $\langle a,b\rangle = \{\{a\}, \{a,b\}\}$.

Opmerking: in de verzamelingenleer gebruikt men ook wel de notatie (a,b).

2.5 <u>Lemma</u>. $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \rightarrow a = c \wedge b = d$.

Bewijs: $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$.

(1) $\{a\} \neq \{a,b\}$, dan $a \neq b$;
dan ook $c \neq d$ (waarom?)
Nu geldt $\{a\} = \{c\}$ (waarom?), en dus $a = c$.
$\{a,b\} = \{a,d\} \rightarrow b = d$.

(2) $\{a\} = \{a,b\}$, dan $a = b$ en $\langle a,b\rangle = \{\{a\}\}$;
dan ook $\{c\} = \{c,d\}$ en $c = d$ en $\langle c,d\rangle = \{\{c\}\}$.
Dus $\{a\} = \{c\}$ en $a = c$. ⊠

Geordende paren kunnen we generaliseren tot geordende drietallen, viertallen, enz.

2.6 <u>Definitie</u>. $\langle a,b,c\rangle = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle$
$\langle a,b,c,d\rangle = \langle\langle a,b,c\rangle,d\rangle$.

Inductieve definitie:

$$\langle a\rangle = a$$

$$\langle a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}\rangle = \langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,a_{n+1}\rangle.$$

2.7 <u>Definitie van cartesischeproduct.</u>

$$A \times B = \{\langle a,b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A \times B \times C = \{\langle a,b,c\rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}.$$

Inductieve definitie:

$$\mathop{\times}_{i=1}^{1} A_i = A$$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n+1} A_i = (\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i) \times A_{n+1}.$$

Merk op dat het cartesisch product niet symmetrisch en niet associatief is.

2.8 <u>Eigenschappen van het cartesisch product.</u>

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

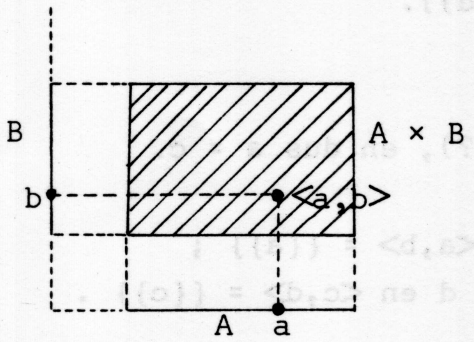
(3) $B \subseteq C \rightarrow A \times B \subseteq A \times C$.

(4) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

(5) $A \times A = B \times B \rightarrow A = B$.

(6) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

<u>Meetkundige voorstelling.</u>



Maak de plaatjes die horen bij 2.8 (1) - (5).

3. De Boole-operaties.

In deze paragraaf resumeren wij bekende definities en stellingen.

3.1 Def. $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (doorsnede)

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (vereniging)

$A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (verschil)

$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$ (lege verzameling)

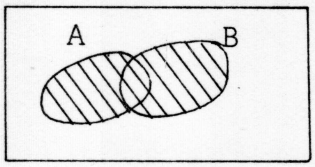
3.2 Def. $A \subseteq B := \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ (inclusie)

Volgens het extensionaliteitsprincipe geldt

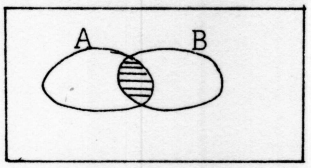
3.3 $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Als we uitsluitend deelverzamelingen van een vaste verzameling V (die we het universum noemen) beschouwen, dan definiëren we het complement van A door

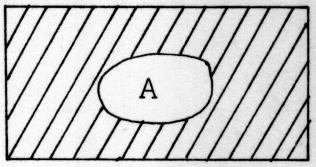
3.4 $\overline{A} := \{x \mid x \notin A\} = V - A$



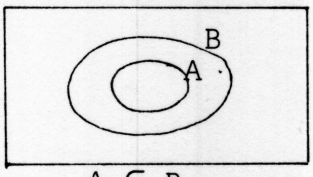
$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$



$A \subseteq B$

3.5 Definitie: A heet een echte deelverzameling van B als $A \subseteq B$ en $A \neq B$.

Notaties: $A \subsetneq B$ of $A \subsetneq B$ (in de wiskunde gebruikt men ook $\subset$ i.p.v. $\subseteq$).

3.5 Eigenschappen van de Boole operaties.

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(1*) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(2) $A \cup B = B \cup A$	(2*) $A \cap B = B \cap A$
(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup \cup (A \cap C)$	(3*) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) $A \cup A = A$	(4*) $A \cap A = A$
(5) $A \cup \emptyset = A$	(5*) $A \cap V = A$
(6) $A \cup V = V$	(6*) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	(7*) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(8) $A \cup \overline{A} = V$	(8*) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
(9)	$\overline{V} = \emptyset$
(10)	$\overline{\emptyset} = V$

Opm. In (5) - (10), (5*) - (10*) is V het universum.

3.6 <u>Eigenschappen van inclusie</u>.

(1) $\cup$ en $\cap$ zijn monotoon stijgend.

(2) $\overline{}$ is monotoon dalend ($A \subseteq B \rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$).

(3) $\emptyset \subseteq A$ en $A \subseteq V$

(4) $A \subseteq A \cup B$ $\quad A \cap B \subseteq A$

(5) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$

(6) $A \subseteq B \leftrightarrow B \cup \overline{A} = V$

(7) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A$

3.7 <u>Gegeneraliseerde verenigingen en doorsneden</u>.

Zij A een verzameling van verzamelingen (d.w.z. ieder element van A is een verzameling, bijv. de verzameling omgevingen van een punt).

$\cup A = \{x \mid \exists a \in A(x \in a)\}$

$\cap A = \{x \mid \forall a \in A(x \in a)\}$

Wat gebeurt er als $A = \emptyset$?

$x \in \cup\emptyset \leftrightarrow \exists a(a \in \emptyset \wedge x \in a)$.

Het rechterlid is onwaar, dus geldt voor alle x

$x \notin \cup\emptyset$, ofwel $\cup\emptyset = \emptyset$.

$x \in \cap\emptyset \leftrightarrow \forall a(a \in \emptyset \rightarrow x \in a)$.

Het rechterlid is waar ($a \in \emptyset \rightarrow x \in a$ is een tautologie!) dus geldt $x \in \cap\emptyset$ voor alle x. Als we met een vast universum V werken geldt dus $\cap\emptyset = V$.

Opmerking 1: een verzameling van verzamelingen noemt men ter vermijding van vergissingen ook wel <u>collectie</u> of <u>familie</u>.

<u>Opmerking 2</u>: Men geeft een familie vaak aan m.b.v. een index verzameling: $A = \{A_i\}_{i\in I}$.
Dan worden vereniging en doorsnede genoteerd als

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{en} \quad \bigcap_{i\in I} A_i.$$

<u>Vb.</u> $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,n+1] = \emptyset$, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n,n+1] = \mathbb{R}$, $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} U_\varepsilon(p) = \{p\}$ waar $U_\varepsilon(p)$ een ε-omgeving van een punt van $\mathbb{R}^n$ is.
We geven de familie ook wel aan d.m.v. een eigenschap.
Laat $P(X)$ een eigenschap van een verzameling X zijn, en $A = \{X|P(X)\}$, dan schrijven we voor $\cup A$ ook wel

$$\cup\{X|P(X)\} \text{ of } \bigcup_{P(X)} X.$$

Idem voor $\cap$.
<u>Vb.</u> $\bigcap_{X\supseteq E} X = E$ $\quad \bigcup_{X\subseteq E} X = E$ $\quad \bigcap_{p\in X} X = \{p\}$ $\quad \bigcup_{p\notin X} X = \overline{\{p\}}$.

In 3.6 (7) zagen we dat inclusie gedefinieerd kan worden m.b.v. doorsnede of vereniging. Het omgekeerde blijkt ook mogelijk te zijn, nl. door de doorsnede te karakteriseren als de grootste verzameling die in A en B bevat is. Evenzo is de vereniging de kleinste verzameling die A en B omvat. We formuleren dit preciezer in

3.8 <u>Stelling</u>. $C = A \cap B \leftrightarrow (C \subseteq A \wedge C \subseteq B) \wedge \forall X(X \subseteq A \wedge X \subseteq B \rightarrow X \subseteq C)$.

Opmerking: het eerste deel van het rechterlid zegt dat C in A en B bevat is en het tweede deel zegt dat C alle gemeenschappelijke deelverzamelingen van A en B omvat (d.w.z. de grootste is).

<u>Bewijs</u>. $\rightarrow$ eenvoudig, doe zelf.
$\leftarrow$ Omdat $C \subseteq A$ en $C \subseteq B$ geldt automatisch $C \subseteq A \cap B$.
We weten dat $A \cap B \subseteq A$ en $A \cap B \subseteq B$.
Volgens $\forall X(X \subseteq A \wedge X \subseteq B \rightarrow X \subseteq C)$ geldt nu dus ook $A \cap B \subseteq C$.
Conclusie $A \cap B = C$.

3.9 <u>Stelling</u>. $C = A \cup B \leftrightarrow (C \supseteq A \wedge C \supseteq B) \wedge (\forall X(X \supseteq A \wedge X \supseteq B \rightarrow X \supseteq C)$.

Bewijs: analoog aan 3.8.

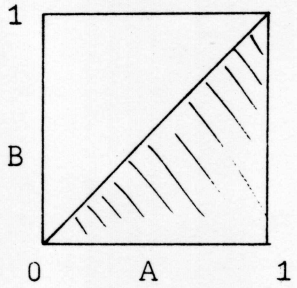
4. Relaties en Functies.

4.1 Definitie: Een n-aire relatie $R^{(n)}$ is een deelverzameling van een cartesisch product $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$.

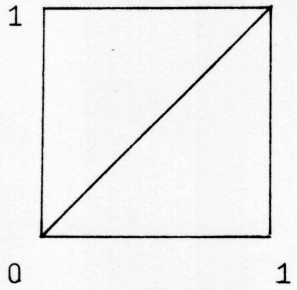
Het bekendste zijn de binaire relaties R

$$R \subseteq A \times B$$

Vb. $A = B = [0,1]$



De gearceerde verzameling is de "Groter"-relatie.



De diagonaal is de gelijkheidsrelatie.

4.2 Definitie: Een binaire relatie R heet

(i) reflexief als $\forall x(\langle x,x\rangle \in R)$

(ii) symmetrisch als $\forall xy(\langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$

(iii) transitief als $\forall xyz(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$

(iv) een equivalentie relatie als hij reflexief, symmetrisch en transitief is.

Notatie. Meestal schrijven we $R(x,y)$ i.p.v. $\langle x,y\rangle \in R$. Sommige auteurs gebruiken xRy.

4.3 <u>Definitie</u> Zij R een binaire relatie.
Het <u>domein</u> (domain) van R is $\{x \mid \exists y\ R(x,y)\}$.
Het <u>bereik</u> (range) van R is $\{y \mid \exists x\ R(x,y)\}$

<u>Notatie</u>: Dom(R) is het domain van R
Ran(R) is het bereik van R

<u>Vb</u>. $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. $R(x,y) := y = \mu z[z \in \mathbb{Z} \wedge z \geqslant x]$
   ($\mu z A(x_1,\ldots,x_{n_1} z)$ is een notatie voor "het kleinste getal z dat voldoet aan $A(x_1,\ldots,x_{n_1} z)$)
   $Dom(R) = \mathbb{R}$ $\quad$ $Ran(R) = \mathbb{Z}$

2. $R(x,y) := x^2+y^2 \leqslant 1$
   $Dom(R) = Ran(R) = [-1,1]$

3. $R(x,y) := |x+y| = 0$
   $Dom(R) = Ran(R) = \cancel{\{0\}}\ \mathbb{R}$

4. $R(x,y) := \forall y(x > x+y)$
   $Dom(R) = Ran(R) = \emptyset$ (en $R=\emptyset$)

4.4 <u>Definitie</u> Zij R een equivalentie relatie (schrijf $a \sim b$ i.p.v. $R(a,b)$), dan heet $\{b \mid a \sim b\}$ de <u>equivalentie-klasse van a onder $\sim$</u>.

<u>Notaties</u>: $[a]_\sim$ (of $[a]$ wanneer geen misverstand mogelijk is) of $a/\sim$

4.5 <u>Stelling</u> Zij $\sim$ een equivalentie relatie op A (dwz. $Dom(\sim) = Ran(\sim) = A$), dan geldt

(i) $a \in [a]$
(ii) $a \sim b \leftrightarrow [a] = [b]$
(iii) $\neg a \sim b \leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$
(iv) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$

Bew. (i) $a \sim a$, dus $a \in [a]$
(ii) $\rightarrow$ Zij $a \sim b$ en laat $c \in [a]$.

Dan $a \sim c$. Wegens de symmetrie geldt $b \sim a$, dus $b \sim c$ (transitiviteit).

Dwz. $c \in [b]$, dus $[a] \subseteq [b]$

Analoog $[b] \subseteq [a]$

$$\left.\begin{array}{r} \leftarrow [a] = [b] \\ b \in [b] \end{array}\right\} \rightarrow b \in [a]$$

Dus $a \sim b$.

(iii) Op grond van (ii) kunnen we volstaan met te bewijzen $[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b]$.

Zij $c \in [a] \cap [b]$, dan $a \sim c$ en $b \sim c$.

Gevolg: $a \sim b$, en volgens (ii) $[a] = [b]$

(iv) $\bigcup_{a \in A} [a] \subseteq A$ is triviaal.

Kies nu $a \in A$, dan $a \in [a] \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]$ ⊠

<u>Samenvatting</u>: A is de vereniging van al zijn equivalentieklassen en de klassen zijn onderling disjunct. Anders: de equivalentieklassen vormen een <u>partitie</u> van A.

4.6 <u>Definitie</u>. De <u>converse</u> $\check{R}$ van R wordt gedefinieerd door

$$\check{R}(x,y) \leftrightarrow R(y,x)$$

Opmerking: meetkundig komt de converse van R neer op het spiegelbeeld in de diagonaal.

4.7 <u>Definitie</u>. Een <u>functie</u> of <u>afbeelding</u> is een relatie F met de eigenschap $\langle x,y\rangle \in F \wedge \langle x,z\rangle \in F \rightarrow y=z$.

Omdat de y met $\langle x,y\rangle \in F$ toch eenduidig bepaald is schrijven we $F(x)$ voor y.

Als $F \subseteq A \times B$ en $\mathrm{Dom}(F)=A$, dan schrijven we $F:A \rightarrow B$.

4.8 <u>Definitie</u>. Een afbeelding F heet

(i) een <u>injectie</u> van A in B als $\mathrm{Dom}(F)=A$, $\mathrm{Ran}(F) \subseteq B$ en $F(x) = F(y) \rightarrow x=y$ (F is <u>injectief</u>)

(ii) een <u>surjectie</u> van A op B als $\mathrm{Dom}(F)=A$ en $\mathrm{Ran}(F)=B$ (F is <u>surjectief</u>)

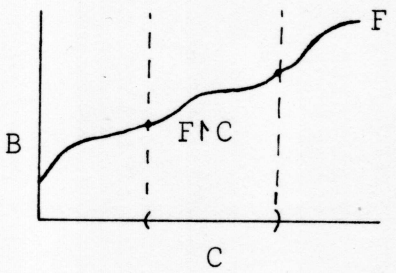
(iii) een <u>bijectie</u> van A op B als F zowel een surjectie als een injectie van A in B is (F is <u>bijectief</u>)

4.9 <u>Definitie</u>. Als de converse van F een functie is, dan noemen we die de <u>inverse</u> van F. (Notatie: F^{-1})
We zeggen dan dat de inverse van F bestaat, of dat F een inverse heeft.

4.10 Lemma. (i) F heeft een inverse $\leftrightarrow$ F is injectief
(ii) $F(x)=y \leftrightarrow F^{-1}(y)=x$

4.11 <u>Definitie</u>. Samenstelling of compositie van afbeeldingen.
$F \circ G = \lambda x.F(G(x))$.

4.12 <u>Definitie</u>. Zij $F:A \to B$, $C \subseteq A$ dan is de beperking van F tot C gedefinieerd door $F \restriction C := F \cap (C \times B)$



4.13 <u>Lemma</u> $G = F \restriction C \leftrightarrow Dom(G) = C \wedge \forall x \in C(F(x)=G(x))$
Bewijs: $\to$ per definitie geldt $Dom(G) = C$.
$G = F \cap (C \times B)$, dus $\langle x,y\rangle \in G \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \wedge x \in C \wedge y \in B$
of $G(x)=y \leftrightarrow F(x)=y \wedge x \in C \wedge y \in B$
$y \in B$ geldt vanzelf, dus als $x \in C$, dan $G(x)=F(x)$
$\leftarrow$ $Dom(G)=C \to G \subseteq C \times B$
$\forall x \in C(F(x)=G(x)) \to \forall x \in C(\langle x,y\rangle \in F \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in G)$
$\to (C \times B) \cap F = (C \times B) \cap G = G$
$\to F \restriction C = G$ $\boxtimes$

4.14 <u>Lemma</u> (i) F en G zijn surjectief $\to F \circ G$ is surjectief
(ii) F en G zijn injectief $\to F \circ G$ is injectief

(iii) F en G zijn bijectief $\rightarrow$ $F \circ G$ is bijectief
(iv) F is bijectief $\rightarrow$ F^{-1} is bijectief.

4.15 <u>Lemma</u> De bijecties van A op A vormen een groep onder compositie (de <u>permutatie groep</u> van A).

Als $F:V \rightarrow U$ dan is het vaak nuttig om het bereik van F op een deelverzameling van V te beschouwen. In de wiskunde gebruikt men hiervoor doorgaans de notatie F(A), voor $A \subseteq V$.
In de verzamelingenleer werkt F zelf echter op verzamelingen en de notatie F(A) kan dubbelzinnig zijn (het is bijvoorbeeld niet uitgesloten dat $A \in A$, wat betekent dan F(A)?) Daarom zullen wij hier een speciale notatie invoeren.

4.16 <u>Definitie</u>. Als $F:V \rightarrow W$ en $A \subseteq V$, $B \subseteq W$
dan $F''A = \{y \mid \exists x \in A(y=F(x))\}$
$\overset{-1}{F}''B = \{x \mid \exists y \in B(y=F(x))\}$

4.17 <u>Lemma</u> $F''A = \mathrm{Ran}(F \restriction A)$
$\overset{-1}{F}''B = \mathrm{Dom}(F \cap (V \times B))$

4.18 <u>Lemma</u> Zij $F:V \rightarrow W$, $A,B \subseteq V$, $C,D \subseteq W$
dan geldt
(i) $F''(A \cup B) = F''A \cup F''B$
(ii) $F''(A \cap B) \subseteq F''A \cap F''B$
(iii) $\overset{-1}{F}''(C \cup D) = \overset{-1}{F}''C \cup \overset{-1}{F}''D$
(iv) $\overset{-1}{F}''(C \cap D) = \overset{-1}{F}''C \cap \overset{-1}{F}''D$
(v) $\overset{-1}{F}''\bar{C} = \overline{\overset{-1}{F}''C}$

Bewijs: (v) $x \in \overset{-1}{F}''\bar{C} \leftrightarrow F(x) \in \bar{C} \leftrightarrow$
$F(x) \notin C \leftrightarrow \neg(F(x) \in C)$
$\neg(x \in \overset{-1}{F}''C) \leftrightarrow x \in \overline{\overset{-1}{F}''C}$

Doe de rest zelf.

4.19 <u>Lemma</u>. $F:V \to W$, $A,B \subseteq V$

(i) F is injectief $\leftrightarrow \forall A,B(F''(A\cap B) = F''A \cap F''B)$

(ii) F is surjectief $\leftrightarrow \forall A(F''\bar{A} \supseteq \overline{F''A})$

(iii) F is bijectief $\leftrightarrow \forall A(F''\bar{A} = \overline{F''A})$

Bewijs: (i) $\to$ $\subseteq$ geldt vlgs. 4.18 (ii)

Omgekeerd: $w \in F''A \cap F''B$

$w \in F''A \to w = F(v)$ voor zekere $v \in A$

$w \in F''B \to w = F(v')$ voor zekere $v' \in B$

Omdat F een injectie is geldt $v = v'$

en $w = F(v)$ voor $v \in A \cap B$, dwz. $w \in F''(A\cap B)$

en dus $F''A \cap F''B \subseteq F''(A\cap B)$

Ergo $F''(A\cap B) = F''A \cap F''B$

$\leftarrow$ Stel $v \neq v'$ en $F(v) = F(v') = w$,

dan $F''(\{v\} \cap \{v'\}) = F''\phi = \phi$ en

$F''\{v\} \cap F\{v'\} = \{w\}$. Contradictie.

Dus F is injectie.

(ii) $\to$ Zij $w \in \overline{F''A}$, dan $w \notin F''A$,

Omdat F surjectief is geldt $w = F(v)$ voor zekere $v \in V$. Echter $v \notin A$, dus $v \in \bar{A}$ en $w \in F''\bar{A}$.

$\leftarrow$ Stel F niet surjectief. Dan geldt $F''V \neq W$, dus $\overline{F''V} \neq \phi$, maar $F''\bar{V} = F''\phi = \phi$. Contradictie.

Dus F is surjectief.

(iii) Doe zelf.

4.20 <u>Definitie</u>. $A^B := \{F|F:B \to A\}$

4.21 <u>Stelling.</u> Als A en B resp. n en m ($n \neq 0$) elementen hebben, dan heeft A^B n^m elementen.

Bewijs: inductie naar m.

$m=0$. Dan $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ $B=\phi$

$A\times B = \phi$ en de enige deelverzameling van $A\times B$ is ϕ.

ϕ is een functie (de lege functie), want

$\langle x,y\rangle \in \phi \wedge \langle x,z\rangle \in \phi \to y=z$ is waar. Bovendien geldt $Dom(\phi)= =B$, dus inderdaad, $\phi:\phi \to A$, d.i. $\phi \in A^{\phi}$.

Dus bevat A^{ϕ} precies 1 ($=n^0$) element.

m+1 $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ $B = \{b_1,\ldots,b_m,b_{m+1}\}$

Volgens de inductie hypothese zijn er n^m functies van

$B' = \{b_1,\ldots,b_m\}$ in A.

Laat F zo'n functie zijn, dan zijn

$F_1 = F \cup \{\langle b_{m+1},a_1\rangle\},\ldots,F_n = F \cup \{\langle b_{m+1},a_n\rangle\}$

n verschillende voortzettingen van F.

Op deze manier heeft iedere $F:B' \to A$ n verschillende voortzettingen. Derhalve zijn er $n^m.n = n^{m+1}$ functies van B in A. ⊠

De uitzonderingsgevallen die we nog moeten beschouwen zijn

$n=m=0$ en $m \neq 0$, $n=0$.

(a) $n=m=0$. Dan $A=B=\phi$ en $A\times B = \phi$.

$A\times B$ heeft precies één deelverzameling: ϕ

Per definitie is ϕ een functie, immers

$\langle x,y\rangle \in \phi \wedge \langle x,z\rangle \in \phi \to y=z$ is waar. We concluderen dat ϕ^{ϕ} precies 1 element heeft. want $Dom(\phi) = \phi = B$

(b) $m \neq 0$ $n=0$.

Dan $A=\phi$, $B \neq \phi$. $A\times B = \phi$ en als boven zien we dat ϕ de enige functie is in $A\times B$.

Echter $Dom(\phi) = \phi \neq B$, dus $\phi \notin \phi^B$.

Conclusie: ϕ^B bevat 0 elementen.

5. GELIJKMACHTIGHEID. AFTELBAARHEID

5.1 <u>Definitie</u> (i) $f: A \underset{1}{\leq} B$ als $f: A \to B$ en f injectief.

(ii) $f: A \underset{1}{=} B$ als $f: A \to B$ en f bijectief.

(iii) $A \underset{1}{\leq} B$ als er een f is zodat $f: A \underset{1}{\leq} B$.

(iv) $A \underset{1}{=} B$ als er een f is zodat $f: A \underset{1}{=} B$

(in het laatste geval heten A en B <u>gelijkmachtig</u>)

<u>Vb.</u> (a) $\{1,3,29\} \underset{1}{\leq} \{0,5,88,101\}$

nl. via $f = \{\langle 1,0\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 24,88\rangle\}$ (en nog veel meer functies)

(b) $\mathbb{N} \underset{1}{\leq} \mathbb{Q}$, via de identieke afbeelding.

(c) $\mathbb{R} \leq \mathbb{R}^2$, via $\lambda x \cdot \langle x,0\rangle$

(d) $\mathbb{N}^2 \underset{1}{\leq} \mathbb{N}$ via $\lambda xy \cdot 2^x \cdot 3^y$

(e) $\mathbb{N}$ is gelijkmachtig met de deelverzameling der kwadraten. (Reeds opgemerkt door Galilei (1638), zie Sets and Integration, van Dalen-Monna, blz. 4; werd paradox van Galilei genoemd omdat 'het geheel niet groter was dan een deel'.)

5.2 <u>Definitie</u>. A heet aftelbaar als $A \underset{1}{=} \mathbb{N}$

5.3 <u>Lemma</u> $\underset{1}{=}$ is een equivalentie relatie

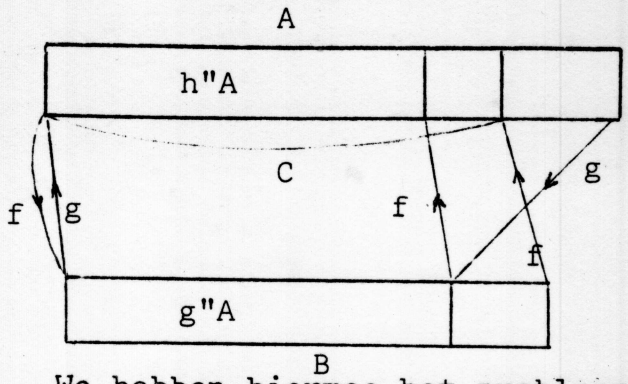
5.4 <u>Lemma</u> $\underset{1}{\leq}$ is reflexief en ~~symmetrisch~~ transitief

5.5 <u>Stelling van Cantor-Bernstein</u>

$$A \underset{1}{\leq} B \wedge B \underset{1}{\leq} A \to A \underset{1}{=} B$$

Bewijs.

Laat $f: B \underset{1}{\leq} A$, dan $f''B = C$ en $B \underset{1}{=} C$. Als we bewijzen kunnen dat $C \underset{1}{=} A$, dan zijn we klaar omdat wegens 5.3 dan ook $B \underset{1}{=} A$ geldt.



Zij $g: A \preccurlyeq_1 B$, en

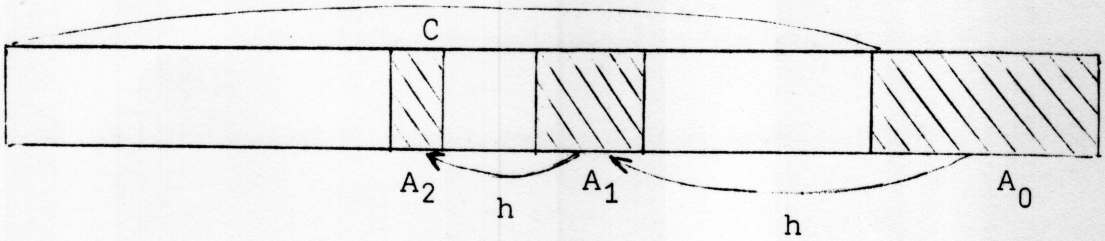
$h = f \circ g$,

dan $h: A \preccurlyeq_1 C$

We hebben hiermee het probleem herleid tot:

$C \subseteq A \wedge h: A \preccurlyeq_1 C \rightarrow A \equiv_1 C$.

Het bewijs berust op de truc van de verpleegster van Blooker: door de afbeelding h wordt A met zijn deelverzameling binnen C gereproduceerd, binnen het beeld van C komt weer een reproductie van A met C voor, enz.enz.enz.



Stel $A_0 = A - C$

$A_1 = h''A_0$.

en algemeen $A_{n+1} = h''A_n$.

Definieer $A^{\#} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

We laten nu de punten van $A^{\#}$ "opschuiven" volgens h, de rest van A laten we vast:

$$F(a) = \begin{cases} h(a) & \text{als } a \in A^{\#} \\ a & \text{als } a \notin A^{\#} \end{cases}$$

Bewering 1: F is injectief.

Stel $a \neq b$. Als $a \in A^{\#}$ en $b \in A - A^{\#}$, dan $F(a) \in A^{\#}$ en $F(b) \in A - A^{\#}$, dus $F(a) \neq F(b)$.

Als $a,b \in A^{\#}$, dan $F(a) = h(a)$, $F(b) = h(b)$ en $h(a) \neq h(b)$ omdat h een injectie is.

Als $a,b \notin A^{\#}$, dan $F(a) = a \neq b = F(b)$.

Bewering 2: F is een bijectie van A op C.

Stel $a \in C$, dan $a \in A - A_0$.

Als $a \in A^{\#}$, dan $a \in A_n$, voor zekere $n > 0$, dus

$a \in h''A_{n-1} \subset F''A$.

Als $a \notin A^{\#}$, dan $a = F(a) \in F''A$.

Hiermee is aangetoond $F: A \underset{F}{=} C$. ⊠

<u>Toepassing</u>: $\mathbb{N}^2$ is aftelbaar.

$\mathbb{N} \underset{1}{\leq} \mathbb{N}^2$ is triviaal (zie Vb (c))

$\mathbb{N}^2 \underset{1}{\leq} \mathbb{N}$ is bewezen in Vb (d).

Volgens Cantor-Bernstein geldt nu $\mathbb{N} \underset{1}{=} \mathbb{N}^2$.

5.6 <u>Definitie</u>. A is oneindig als $\mathbb{N} \underset{1}{\leq} A$.

A is eindig als er een n is zodat

$\{0,\ldots,n\} \underset{1}{=} A$ of als $A = \emptyset$.

<u>Opmerking:</u> het is ook wel gebruikelijk om de eindige verzamelingen tot de aftelbare te rekenen. Men noemt de verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\mathbb{N}$ dan aftelbaar oneindig.

<u>Waarschuwing</u>. Definitie 5.6 is niet eerlijk, in die zin dat we nog niet kunnen bewijzen, dat A oneindig is als hij niet eindig is. Later zullen we dat bewijs leveren met het keuze axioma.

5.7 <u>Stelling</u>. Iedere oneindige verzameling is gelijkmachtig met een echte deelverzameling.

Bewijs.

Volgens def. 5.6 is een verzameling oneindig als hij een aftelbare deelverzameling bevat. Laat A de aftelbare deelverzameling $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ bevatten.

Definieer $F(x) = \begin{cases} a_{n+1} & \text{als } x = a_n \\ x & \text{anders} \end{cases}$

F is een injectie en $F''A \neq A$. ⊠

Bewijs het omgekeerde zelf.

Stelling 5.7 blijkt karakteristiek te zijn voor oneindige verzamelingen.

5.8 <u>Stelling</u>. Als A eindig is, dan is A niet gelijkmachtig met een echte deelverzameling.

Bewijs.
Inductie naar het aantal elementen van A.

$A = \emptyset$. Triviaal.

$A = \{a_1,\ldots,a_{n+1}\}$. Laat de stelling bewezen zijn voor alle verzamelingen met hoogstens n elementen.

Stel $f: A \underset{1}{=} B \subseteq A$ en $B \neq A$.

Dan is er minstens één element a_i zodat voor geen a_j $F(a_j) = a_i$. Laat a_{n+1} dit element zijn (geen beperking).

Dan geldt $F(a_{n+1}) = a_k \in B$.

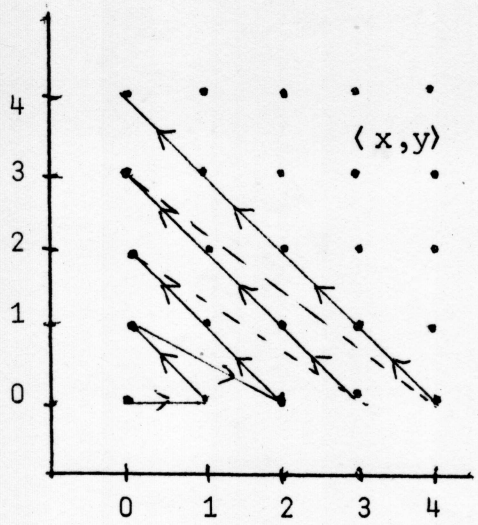
De beperking van F tot B is een injectie (ga na).

Volgens de inductie hypothese is er voor iedere $a_i \in B$ precies één a_j zodat $F(a_j) = a_i$. Maar dan is a_k het beeld van a_{n+1} en van een element in B.. Dit is in strijd met het feit dat F een injectie is. ⊠

5.9 <u>Corollarium</u>. Laten A en B resp. n en m elementen hebben, dan geldt $A \underset{1}{=} B$ dan en slechts dan als $m = n$.

Een injectie van $\mathbb{N}^2$ in $\mathbb{N}$ kan opgevat worden als een <u>codering</u> van $\mathbb{N}^2$, d.w.z. een functie π die geordende paren getallen codeert in getallen. Zo'n functie noemen we een <u>paringsfunctie</u> of een <u>paring</u>.

Volgens de toepassing na 5.5 bestaan er bijectieve paringsfuncties. We zullen een speciale paring aangeven.



In de figuur is met pijltjes aangegeven hoe we de paren coderen:

$\langle 0,0\rangle \rightarrow 0$
$\langle 1,0\rangle \rightarrow 1$
$\langle 0,1\rangle \rightarrow 2$
$\langle 0,2\rangle \rightarrow 3$ 2,0
$\langle 1,1\rangle \rightarrow 4$
$\langle 2,0\rangle \rightarrow 5$ 0,2
.....

Stel we zijn bij $\langle x,y\rangle$ aangekomen, dan zitten we op de $(x+y)^e$ antidiagonaal.

Er zijn dus al $1+2+3+\ldots+(x+y)$ paren op complete antidiagonalen aan de beurt geweest.
Bovendien op de anti diagonaal van $\langle x,y\rangle$ zelf ook nog y elementen d.w.z. $\langle x,y\rangle$ is no $\frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y$.

Dus $\langle x,y\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+x+3y)$

Definieer $J(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+x+3y)$

Aangezien J een bijectie van $\mathbb{N}^2$ op $\mathbb{N}$ is, bestaat J^{-1}.

D.w.z. $J^{-1}(z) = \langle x,y\rangle$ voor zekere x en y die eenduidig voor z bepaald worden (neem de projecties van $J^{-1}(z)$).

Hierdoor worden functies K en L gedefinieerd zodat

$$K(J(x,y)) = x$$

$$L(J(x,y)) = y$$

$$J(K(z),L(z)) = z$$

We noemen K en L de inversen van de paringsfunctie J.

5.10 <u>Stelling</u>. Als A en B aftelbaar zijn, dan is $A \times B$ aftelbaar.

Bewijs.

Zij $f: \mathbb{N} \underset{1}{=} A$

$g: \mathbb{N} \underset{1}{=} B$, dan geldt

$\lambda xy.\langle f(x),g(y)\rangle : \mathbb{N}^2 \underset{1}{=} A \times B.$

Wegens $\mathbb{N} \underset{1}{=} \mathbb{N}^2$ geldt nu $\mathbb{N} \underset{1}{=} A \times B$. ⊠

5.11 <u>Corollarium</u>. Als $A_1, \ldots, A_n$ aftelbaar zijn, dan is

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i \text{ aftelbaar.}$$

5.12 <u>Stelling</u>. Als A en B aftelbaar zijn, dan is $A \cup B$ aftelbaar.

Bewijs.

Zij $f: \mathbb{N} \underset{1}{=} A$

$g: \mathbb{N} \underset{1}{=} B$

Definieer $h(x) = \begin{cases} f(y) & \text{als} \quad x=2y \\ g(y) & \text{als} \quad x=2y+1 \end{cases}$

We hebben nu de elementen van A en B op één rij gezet, maar er kunnen herhalingen optreden. Daarom definiëren we

F door $\begin{cases} F(0) = h(0) \\ F(n+1) = h(\mu x[h(x) \notin \{F(0), \ldots, F(n)\}]). \end{cases}$

F doorloopt de hele rij en vermijdt herhalingen.
Het is duidelijk dat $F: \mathbb{N} \underset{1}{=} A \cup B$.

5.13 <u>Corollarium</u>. De vereniging van eindig veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

Opmerking: later (stelling 9.5) zullen we m.b.v. het keuze axiom een analoge stelling over aftelbare verenigingen bewijzen.

De moeilijkheid van een generalisatie van 5.12 naar aftelbare verenigingen (zelfs voor $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ met A_i eindig !) is dat we weten dat er bij iedere n een F_n is met $F_n: \mathbb{N} \underset{1}{=} A_n$ maar dat we niet kunnen zeggen: kies maar voor iedere n zo'n F_n. We zouden dan n.l.

oneindig veel keuzen tegelijk moeten doen, en dat is iets waarvoor we het Keuze Axioma nodig hebben.
Wanneer we echter het gegeven verscherpen, dan kunnen we toch nog de aftelbaarheid van $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ concluderen.

5.14. <u>Stelling</u>. Laten verzamelingen A_n en injecties F_n gegeven zijn zodat (i) $\operatorname{Ran} F_n = A_n$

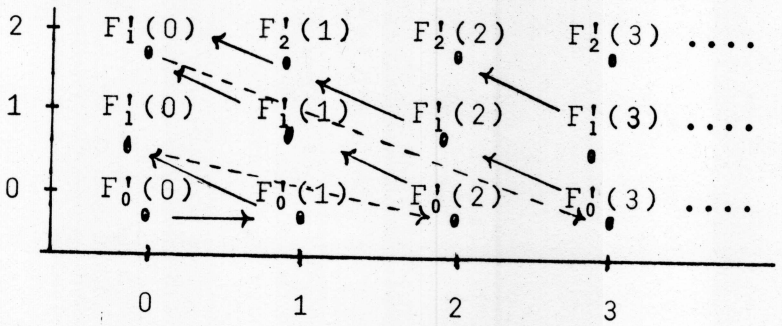
(ii) $\operatorname{Dom} F_n = \mathbb{N}$ of $\operatorname{Dom} F_n = \{0,1,\ldots,K_n\}$

Dan is $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eindig of aftelbaar.

Bewijs: We gaan de verzamelingen in rijen in het eerste kwadrant uitzetten. Voor het gemak herhalen we, in het geval dat A_n eindig is, voortdurend het laatste element.
D.w.z. we definiëren een nieuwe functie F'_n door

$$F'_n(i) = \begin{cases} F_n(i) & \text{als } i\leq K_n \\ F_n(K_n) & \text{als } i>K_n \end{cases}$$

Ter vermijding van discriminatie noemen we F_m ook F'_m als $\operatorname{Dom}(F_m)=\mathbb{N}$.



We maken nu een wandeling als in de figuur op blz. 19.
Definieer $F(0) = F'_0(0)$. Veronderstel nu dat $F(0),\ldots,F(n)$ al gedefinieerd zijn. Zoek dan het kleinste getal met de eigenschap $F'_{K(p)}(L(p))\notin\{F(0),\ldots,F(n)\}$.
Als dat getal p_0 bestaat, stel dan $F(n+1)=F'_{K(p_0)}(L(p_0))$.
Anders weten we dat we alle elementen van $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ al gehad hebben, dwz. F heeft domein $\{0,\ldots,n\}$ en $F:\{0,\ldots,n\} \underset{1}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

Ergo $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ is eindig.
In het geval dat voor iedere n zo'n p_0 gevonden kan worden geldt $F:\mathbb{N} \underset{1}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Ergo $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ is aftelbaar. ⊠

<u>Opmerking</u>.
In de praktijk kunnen we vaak de afbeeldingen F_n uit stelling 5.14 echt bepalen zodat we toch nog zonder het keuze axioma kunnen concluderen dat de aftelbare vereniging van eindige of aftelbare verzamelingen eindig of aftelbaar is.
In het algemeen zal men echter het keuze axioma te hulp moeten roepen.

5.16. <u>Toepassing</u>:

(a) $\mathbb{Q}$ is aftelbaar
(b) Als A aftelbaar is, dan is de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van A aftelbaar.
(c) Als A aftelbaar is, dan is de verzameling van alle eindige rijtjes (geordende n-tallen) aftelbaar.

6. KARDINALEN

Omdat $\underset{1}{=}$ een equivalentie relatieis, die ruwweg uitdrukt dat verzamelingen 'evenveel' elementen hebben, kan men, in navolging van Frege en Russell, de equivalentie klassen opvatten als abstracte versies van 'aantallen'.

We geven hier een naieve benadering die later fout zal blijken te zijn en die we dan met een kunstgreep zullen redden.

6.1 <u>Definitie</u>. Zij A een verzameling, dan heet $A/_{\equiv}$ het <u>kardinaalgetal</u> of de <u>kardinaal</u> van A.

Notatie : $\overline{\overline{A}}$.

6.2 <u>Definitie</u>. $\aleph_0 := \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

$\underline{0} := \overline{\overline{\emptyset}}$

$\underline{n} := \overline{\overline{\{1,\ldots,n\}}}$

We zullen kardinalen aangeven met kleine gotische letters.

6.3 <u>Definitie</u>. (i) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} := A \preccurlyeq B$

(ii) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} := \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$

Opmerking: in bovenstaande definitie (en in volgende definities) worden relaties tussen kardinalen gedefinieerd door verwijzing naar representanten. Zoals bekend moeten we dan bewijzen dat het gedefinieerde begrip "<u>onafhankelijk is van de keuze der representanten</u>" (of "<u>welgedefinieerd</u>"). Wij zullen dit voor (i) uitvoeren. De lezer wordt geacht in alle voorkomende gevallen de welgedefinieerdheid na te gaan!

$A \preccurlyeq B$ en $A \equiv A'$, $B \equiv B'$

dan $A' \preccurlyeq A$ en $B \preccurlyeq B'$ (per definitie).

Pas de transitiviteit van $\preccurlyeq$ toe, dan vinden we $A' \preccurlyeq B'$. Conclusie: $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ is welgedefinieerd.

6.4 <u>Stelling</u>. De kardinalen zijn door $\leqslant$ partieel geordend.

Bewijs.
We hoeven alleen aan te tonen dat $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \wedge \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, maar dit is een regelrechte vertaling van de stelling van Cantor-Bernstein (5.5).

6.5 <u>Definitie</u>.

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} := \overline{\overline{(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})}}$$

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} := \overline{\overline{A \times B}}$$

$$\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} := \overline{\overline{A^B}}$$

Ga na dat deze operaties welgedefinieerd zijn.

We doen dit hier alleen voor $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$.

Stel $F: A \underset{1}{=} A'$

$G: B' \underset{1}{=} B$

en $f: B \to A$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & A \arrow[d, "F"] \\ B' \arrow[u, "G"] \arrow[r, dotted, "\Phi(f)"'] & A' \end{tikzcd}$$

definieer

$$\Phi(f) = F \circ f \circ G$$

Bewering $\Phi: A^B \underset{1}{=} A'^{B'}$

(1) Φ is injectief.

Stel $f \neq f'$, dan $f(b) \neq f'(b)$ voor zekere $b \in B$.
Laat $b_0 = G^{-1}(b)$.

Dan $(\Phi(f))(b_0) = F(f(G(G^{-1}(b)))) = F(f(b)) \neq$

$\neq F(f'(b)) = F(f'(G(G^{-1}(b)))) = (\Phi(f')(b_0)$

Dus $\Phi(f) \neq \Phi(f')$.

(2) Φ is surjectief.

Zij $h: B' \to A'$, dan is $F^{-1} \circ h \circ G^{-1}$ een origineel van h onder Φ, immers
$\Phi(F^{-1} \circ h \circ G^{-}) = F \circ F^{-1} \circ h \circ G^{-1} \circ G = h$

Opmerking. De producten in de definitie van de som zijn alleen maar trucjes om twee disjuncte verzamelingen te krijgen, die gelijkmachtig zijn met A en B.

6.6 <u>Lemma</u>. Als $A \cap B = \emptyset$, dan $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$

Met de gegeven definities kunnen we sommige resultaten van de vorige paragraaf handig samenvatten.

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$,(toepassing 5.5)

$\underline{n} = \underline{m} \leftrightarrow n = m$ (5.9)

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (5.12)

$\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$ (5.16)

De operaties op kardinalen hebben de verwachte eigenschappen.

6.7 <u>Stelling</u>. (a) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$

(b) $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p})$

(c) $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$

(d) $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}) = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{p}$

(e) $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}$

(f) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}}$

(g) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n})^{\mathfrak{p}}$

(h) $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$

Bewijs.

We beperken ons tot enkele gevallen. Ga zelf de andere na.

(d) Kies A,B,C zodat $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{n}$, $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{p}$

Te bewijzen $(A \times B) \times C \underset{1}{=} A \times (B \times C)$

Definieer $F = \lambda abc \cdot \langle a, \langle b, c \rangle \rangle$

F is injectief: $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle = \langle a', \langle b', c' \rangle \rangle \rightarrow$

$a = a' \wedge \langle b, c \rangle = \langle b', c' \rangle \rightarrow$

$a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \rightarrow$

$\langle a, b, c \rangle = \langle a', b', c' \rangle$

F is surjectief: evident.

(h) Kies A,B,C als boven.

Te bewijzen $(A^B)^C \underset{1}{=} A^{B \times C}$

Zij $f \in (A^B)^C$, dan $f: C \to A^B$, d.i.

$f(c) \in A^B$, of $f(c): B \to A$, dus

$(f(c))(b) = a \in A$

Aan f voegen we toe de afbeelding f' met $f'(b,c) = a$.

Definieer nu $F(f) = f' = \lambda bc\cdot(f(c))(b)$

en $F = \lambda f\cdot\lambda bc\cdot(f(c))(b)$

F is injectief:

$$f_1 \neq f_2 \Rightarrow f_1(c) \neq f_2(c) \text{ voor zekere } c \in C,$$

$$\to (f_1(c))(b) \neq (f_2(c))(b) \quad \text{voor zekere } b \in B,$$

$$\to f_1'(b,c) \neq f_2'(b,c)$$

$$\to f_1' \neq f_2'$$

$$\to F(f_1) \neq F(f_2).$$

F is surjectief:

Laat $f' \in A^{B\times C}$ gegeven zijn,

definieer $f = \lambda c\cdot\lambda b\cdot f'(b,c)$

Dan $F(f) = \lambda bc\cdot[((\lambda c\cdot\lambda b\cdot f'(b,c))(b))(c)]$

$= \lambda bc\cdot[(\lambda b.f'(b,c))(b)]$

$= \lambda bc.f'(b,c) = f'$. ⊠

Wij hebben eindige rijtjes ingevoerd als geordende n-tallen. Men kan dat ook doen door afbeeldingen van $\{1,\ldots,n\}$ in A te beschouwen. Dat beide benaderingen gelijkwaardig zijn wordt aangetoond door

6.7 <u>Lemma</u>. $A \times B \underset{1}{=} \{f \in (A \cup B)^{\{1,2\}} \mid f(1) \in A \wedge f(2) \in B\}$

Bewijs.

Definieer $F(\langle a,b\rangle) = \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle\}$.

F is de gezochte bijectie. ⊠

Merk op dat F niet zo maar een bijectie is.
Het linker- en rechterlid zijn beide producten in de zin van de categorietheorie (Abelian Categories, Freyd,blz.22,23) en dus zijn ze isomorf. Het kanonieke isomorfisme is juist F.

6.8 OPGAVE. Generaliseer 6.7.

7. DE MACHTSVERZAMELING

We nemen aan dat er bij iedere verzameling A een verzameling $\mathcal{P}(A)$ is, die juist uit de deelverzamelingen van A bestaat. We noemen $\mathcal{P}(A)$ de <u>machtsverzameling</u> (powerset) van A.

7.1 <u>Lemma</u>. Bij iedere A is er precies één machtsverzameling.

Bewijs.
Stel dat C en D beide machtsverzamelingen van A zijn. Dan geldt

$$X \in C \leftrightarrow X \subseteq A \quad \text{en}$$

$$X \in D \leftrightarrow X \subseteq A.$$

Dus $X \in C \leftrightarrow X \subset D$, op grond van het extensionaliteitsprincipe geldt nu $C = D$. ⊠

7.2 <u>Stelling van Cantor (1891)</u>: $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$

Bewijs.
(1) $F: A \leqslant_1 \mathcal{P}(A)$ met $F(a) = \{a\}$,

$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ en $a \neq b \rightarrow \{a\} \neq \{b\}$.

Dus $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

(2) Stel er is een bijectie G van A op $\mathcal{P}(A)$.

Beschouw $D = \{a \in A \mid a \notin G(a)\}$

$D \subseteq A$, dus $D \in \mathcal{P}(A)$. Omdat G surjectief is geldt

$D = G(d)$ voor zekere $d \in A$.

$d \in D \leftrightarrow d \in G(d) \leftrightarrow d \notin D$. Contradictie.

Ergo er is geen bijectie G als boven, dus $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$. ⊠

Opmerking: in het bovenstaande bewijs is de zgn. <u>diagonaalmethode</u> van Cantor gebruikt.

Hieronder passen wij de diagonaalmethode op een gemakkelijk herkenbaar geval toe.

7.3 <u>Stelling</u>. $\aleph_0 < \underline{2}^{\aleph_0}$

Bewijs.

We moeten aantonen dat $\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}$.

(1) Beschouw $F: \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ met

$F(n) = \lambda x \cdot n$ (d.i. de constante functie met waarde n).

F is een injectie.

(2) Stel er is een bijectie $G: \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

dan is de verzameling functies op $\mathbb{N}$ met waarden 0 of 1 aftelbaar: $\{G(0), G(1), G(2), \ldots\}$.

Noem $G(i) = f_i$.

We zetten de f_i's onder elkaar in een diagram

	0	1	2	3	4	5	6	.	.	.
f_0	0	1	0	0	0	1	0	.	.	.
f_1	1	0	0	0	1	0	1	.	.	.
f_2	0	0	1	0	0	0	0	.	.	.
f_3	1	1	0	1	1	1	0	.	.	.
f_4	1	0	1	0	1	0	1	.	.	.
f_5	0	1	1	0	1	0	1	.	.	.
f_6	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Beschouw de rij waarden op de diagonaal, die bepalen een functie g met $g(i) = f_i(i)$.

Definieer nu $d(i) = 1 - f_i(i)$, d.w.z. we verwisselen in de diagonaal de nullen en enen.

$d \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dus er is een k met $d = G(k) = f_k$.

Echter $d(k) = 1 - f_k(k) \neq f_k(k)$. Contradictie.

Ergo: de bedoelde G bestaat niet.

Dus $\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}$. ⊠

7.4 <u>Corollarium</u>. Er is geen grootste kardinaal.

7.5 <u>Definitie</u>. Zij $B \subseteq A$.

De afbeelding $K_B: A \to \{0,1\}$ met

$$K_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in B \\ 0 & \text{als } x \notin B \end{cases}$$

heet de <u>karakteristieke</u> afbeelding van B t.o.v. A. (Als er geen misverstand mogelijk is laten we A weg.)

We zullen (in afwachting van de ordinalen) de verzameling $\{0,1\}$ aanduiden met 2.

2^A is dan de verzameling karakteristieke functies op A.

7.6 <u>Lemma</u>. $\mathcal{P}(A) \underset{1}{=} 2^A$

Bewijs.

Als $F(B) = K_B$, dan $F: \mathcal{P}(A) \underset{1}{=} 2^A$. ⊠

In de verzamelingsleer treden $\mathcal{P}(A)$ en 2^A op als verwisselbare dubbelgangers.

We kunnen de stelling van Cantor nu schrijven als

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$$

7.7. Tweede bewijs.

Ieder reëel getal tussen 0 en 1 kunnen we een unieke decimale breuk in het tweetallig stelsel toevoegen, n.l. door in gevallen van dubbelzinnigheid steeds de decimale ontwikkeling met oneindig veel nullen te kiezen.

Vb. $\frac{1}{4}$ = 0,01000... = 0,001111... , we kiezen nu 0,01000... .

Gevolg $(0,1) \underset{1}{\leqslant} 2^{\mathbb{N}}$

Om $2^{\mathbb{N}} \underset{1}{\leqslant} (0,1)$ te bewijzen passen we een paar operaties op de oneindige rijtjes $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ toe.

(a) vervang de rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ door $1, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ noem deze rij $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$.

(b) vervang de rij $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ door $b_1, 0, b_2, 0, b_3, 0, b_4, 0, \ldots$, d.w.z. plaats achter iedere b_n een nul. Noem deze rij $c_1, c_2, c_3, \ldots$

Het is duidelijk dat de afbeelding F met $F(a_1, a_2, \ldots) = c_1, c_2, c_3 \ldots$ een injectie is.

De rijen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bevatten geen "staart" met uitsluitend enen, definieren we dus $G(a_1, a_2, \ldots) = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots$, dan G:

$G: 2^{\mathbb{N}} \underset{1}{\leqslant} (0,1)$ ..... (1)

Conclusie: $2^{\mathbb{N}} \underset{1}{=} (0,1)$

We gebruiken nu de tangensfunctie om een interval op $\mathbb{R}$ af te beelden: $\lambda x.\mathrm{tg}(\pi x - \frac{1}{2}\pi) : (0,1) \underset{1}{=} \mathbb{R}$ . .....(2)

Uit (1) en (2) volgt $2^{\mathbb{N}} \underset{1}{=} \mathbb{R}$.

7.7 <u>Stelling</u>. $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$

Bewijs.

Ieder irrationaal getal tussen 0 en 1 wordt door precies één decimale breuk in het tweetallig stelsel bepaald.

Dus $I_0 \underset{i}{\leq} 2^{\mathbb{N}}$, waar $I_0 = \{x \mid 0 < x < 1 \wedge x \text{ irrationaal}\}$

Er zijn aftelbaar veel elementen van $2^{\mathbb{N}}$ die niet als decimale ontwikkeling van een irrationaal getal kunnen optreden. Omdat bovendien $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ aftelbaar is krijgen we gemakkelijk $[0,1) \underset{i}{=} 2^{\mathbb{N}}$.

$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n,n+1)$, dus $\mathbb{R}$ is een aftelbare vereniging van disjuncte deelverzamelingen die allemaal gelijkmachtig zijn met $2^{\mathbb{N}}$ (*).

Zij $X_n = \{f \in 2^{\mathbb{N}} \mid f(0) = n\}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

Dan $F_n : \mathbb{N} \underset{i}{=} X_n$ met

$$F_n(f) = f', \quad \text{waar} \begin{cases} f'(0) = n \\ f'(k+1) = f(k) \end{cases}$$

Resultaat

$$2^{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

$2^{\mathbb{N}}$ is dus de disjuncte vereniging van aftelbaar veel verzamelingen die ieder gelijkmachtig zijn met $2^{\mathbb{N}}$ (**)

Uit (*) en (**) volgt dat $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$. ⊠

7.8 <u>Stelling</u>. $\overline{\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$

(dramatischer: het platte vlak is gelijkmachtig met de rechte lijn. Cantor (1877))

Bewijs.

$$\overline{\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0} . 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$ ⊠

Men kan zich afvragen wat de mogelijke kardinalen van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. In ieder geval zijn er alle eindige machtigheden, $\aleph_0$ en $2^{\aleph_0}$, Cantor vermoedde dat er geen andere kardinalen $\leqslant 2^{\aleph_0}$ waren (1878).

Dit is de zgn.

CONTINUUM HYPOTHESE

CH : $\aleph_0 < \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0} \rightarrow \mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$.

Door Cohen is in 1963 aangetoond dat CH onafhankelijk is van de gebruikelijke axioma's van de verzamelingsleer (vgl. het parallellenpostulaat).

8. ORDE EN WELORDENING

8.1 Definitie. Een binaire relatie R heet een partiële ordening op een verzameling A als

$\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Ran}(R) = A$ en

(1) $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

(2) $xRy \wedge yRx \leftrightarrow x=y$

De structuur $\langle A,R \rangle$ heet een partiëel geordende verzameling.

8.2 Vb. (a) $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$

(b) $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ (deelbaarheidsrelatie)

(c) $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$

(d) $\langle \mathbb{C}, R \rangle$ met $zRw := |z|<|w| \vee z=w$

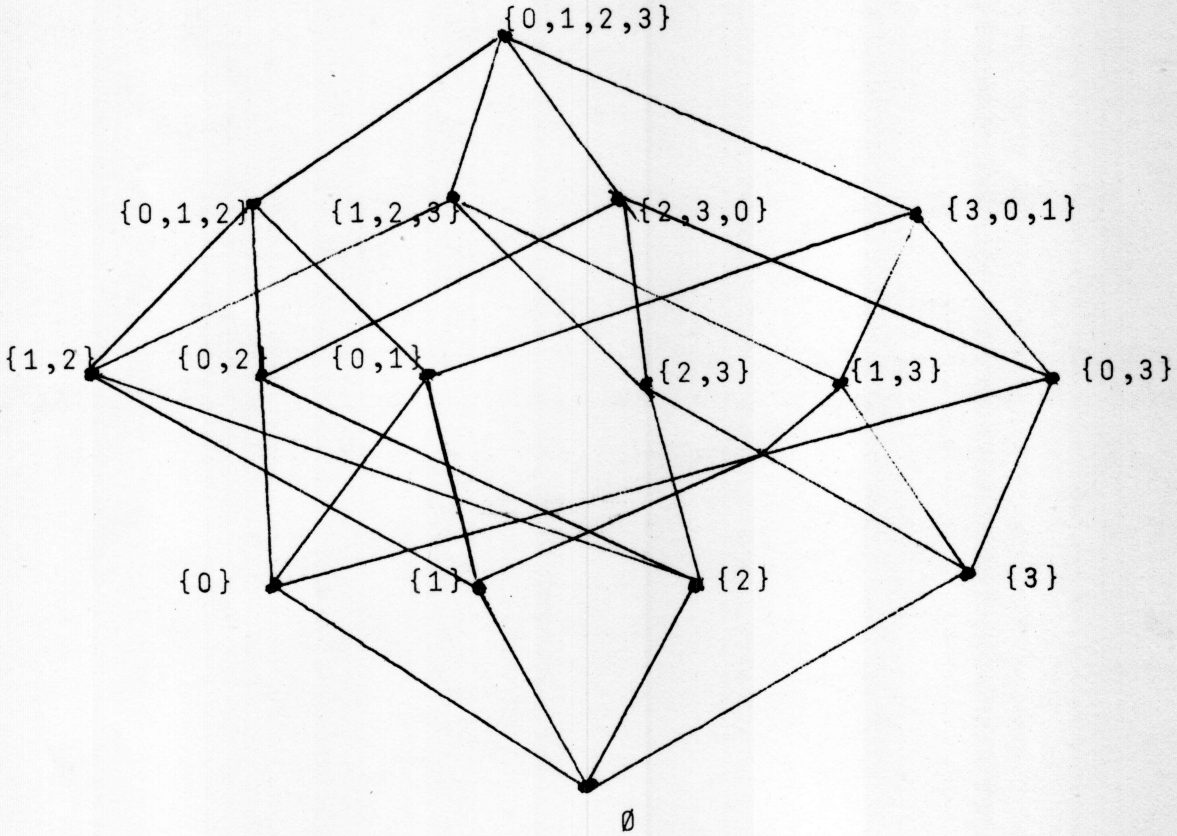
(e) $\langle D, \subseteq \rangle$, waar D de verzameling deelruimten van een vectorruimte is.

(f) $\langle K, \leqslant \rangle$, waar K een verzameling kardinalen is met de partiële ordening van 6.3.

8.3 Diagram van een partiëel geordende verzameling.

Het is vaak handig om een partiëel geordende verzameling meetkundig voor te stellen."Hoger dan" of "rechts van" geeft dan de orde relatie aan.

In Vb. a) beschouwen we ({0,1,2,3})



8.4 Definitie. Een partiëel geordende verzameling heet geordend (of lineair geordend, of totaal geordend) als

(3) $xRy \vee yRx \vee x=y$.

Opmerking: (3) zegt dat elk tweetal elementen vergelijkbaar is.

8.5 <u>Definitie</u>. $\langle A,R_1\rangle \simeq \langle B,R_2\rangle$

als $f: A \underset{1}{=} B$ en

$a_1R_1a_2 \leftrightarrow f(a_1)R_2f(a_2)$

(het gewone isomorfiebegrip)

8.6 <u>Definitie</u>. Als $\langle A,R\rangle$ een partiëel geordende verzameling is, dan is $\langle A,R/_{\simeq}\rangle$ het <u>orde-type</u> van $\langle A,R\rangle$.

Doorgaans zullen we slordig zijn en A een partiëel geordende verzameling noemen. De ordening geven we meestal aan met $<$.

8.7 <u>Definitie</u>. (i) Een geordende verzameling heet dicht geordend als
$\forall a,b(a<b \rightarrow \exists c(a<c<b))$

(ii) Een punt a heet linker eindpunt als
$\forall x(a \leqslant x)$

(iii) idem voor rechter eindpunt.

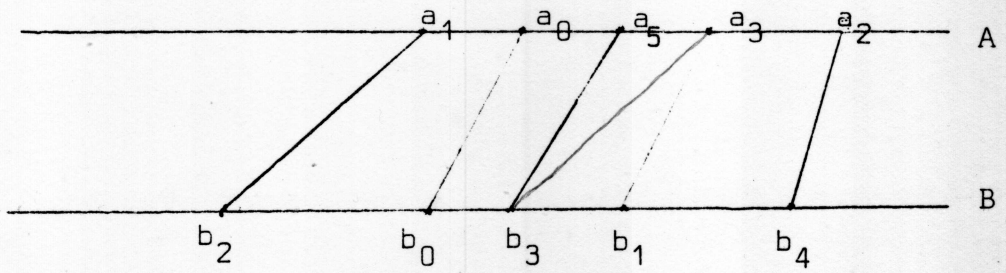
8.8 <u>Stelling</u>. Laten A en B twee aftelbare dicht geordende verzamelingen zonder eindpunten zijn, dan geldt $A \simeq B$.

Bewijs.
(de heen- en weer-methode van Cantor)
Zij $A = \{a_0,a_1,a_2,a_3,\dots\}$

$B = \{b_0,b_1,b_2,b_3,\dots\}$

We definiëren het isomorfisme F stapsgewijs.

<u>Stap 0</u> $F(a_0) = b_0$



<u>Stap 1</u> Neem b_1 en zoek in de rij (a_i) het eerste element $a_{i(1)}$ dat t.o.v. a_0 dezelfde ligging heeft als b_1 t.o.v. b_o. Definiëer $F(a(i)) = b_1$. (in figuur a_3)

Laten nu de stappen 0 t/m 2n-1 al uitgevoerd zijn.

<u>Stap 2n</u> Bepaal het eerste element a_i in de rij dat nog niet behandeld is. Bepaal nu in de rij (b_i) het eerste element b_j dat dezelfde ligging heeft t.o.v. de reeds aangegeven punten F(a) als a_i t.o.v. de corresponderende punten a.

Definiëer $F(a_i) = b_j$.

<u>Stap 2n+1</u> Bepaal het eerste punt b_k in de rij der b_i's dat nog niet behandeld is. Bepaal nu het eerste punt a_ℓ in de rij der a_j's dat dezelfde ligging heeft t.o.v. de reeds aangegeven punten a als b_k t.o.v. de corresponderende punten F(a).

Definiëer $F(a_\ell) = b_k$.

(1) de gevraagde punten kunnen altijd gevonden worden omdat tussen elke twee punten altijd nog een punt ligt en omdat naast elk punt nog een punt ligt.
(2) F is injectief (wegens constructie).
(3) F is surjectief (omdat we beurtelings A en B uitputten).
(4) F behoudt de ordening (wegens constructie).

Conclusie: F is een isomorfisme.

8.9 <u>Corollarium</u>. Alle aftelbare dichtgeordende verzamelingen zonder eindpunten zijn isomorf met $\mathbb{Q}$.

8.10 <u>Definitie</u>. Een geordende verzameling heet <u>welgeordend</u> als iedere niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft.

8.11 <u>Vb</u>. (a) $\emptyset$ is welgeordend
(b) $\{0,1,2,\ldots,10\}$ met de natuurlijke ordening is welgeordend.
(c) $\mathbb{N}$ is welgeordend
(d) $\mathbb{Q}$, met de natuurlijke ordening, is niet welgeordend.

A welgeordend, $a \in A \Rightarrow$ a heeft een opvolger of a eindpunt (rechts)

b opv. van a $\Leftrightarrow a < b \wedge (\neg \exists x)\ a < x < b$.

(e) $\langle \mathbb{N}, \ll \rangle$, met

$$n \ll m := n,m \text{ even} \wedge n < m$$
$$\text{of } n,m \text{ oneven} \wedge n < m$$
$$\text{of } n \text{ even} \wedge m \text{ oneven},$$

is welgeordend.

Analoog aan het principe van volledige inductie voor $\mathbb{N}$ hebben we een inductie principe voor welgeordende verzamelingen.

8.12 <u>Principe van Transfinite Inductie</u>.

Laat A door $<$ welgeordend zijn, dan

$$\boxed{\forall x\,[\,\forall y < x \;\; P(y) \rightarrow P(x)\,] \rightarrow \forall x \;\; P(x)}$$

Bewijs.

Stel $\forall x[\forall y < x \;\; P(y) \rightarrow P(x)]$ . . . . . (*)

en $\neg \forall x \; P(x)$. Dan is $\{x \mid \neg P(x)\} \neq \emptyset$ en dus is er een kleinste element x_0 met $\neg P(x_0)$. D.w.z. $\forall y < x_0 \;\; P(y)$. Echter volgens (*) geldt dan $P(x_0)$. Contradictie.

Dus $\forall x \; P(x)$.

8.13 <u>Definitie</u>. Als A geordend is, dan is $A_x = \{y \in A \mid y < x\}$.
A_x heet het <u>beginsegment</u> van x.

8.14 <u>Definitie</u>. Zij A welgeordend.
Als Dom F = A_x dan heet F een rij van type x.

In de theorie van $\mathbb{N}$ kunnen we functies stapsgewijs definiëren door gebruik te maken van reeds eerder geconstrueerde waarden.

Bijvoorbeeld
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (1+n)\cdot n! \end{cases}$$
of
$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(n+1) = S(n) + (n+1) \end{cases}$$

We zeggen dat deze functies <u>recursief</u> gedefinieerd zijn. We willen een zelfde methode gebruiken bij willekeurige welordeningen. Om precies te zijn $F(x)$ mag geconstrueerd worden m.b.v. <u>alle</u> voorgaande waarden. Omdat dat er in het algemeen oneindig veel zijn vatten we ze samen in $F \restriction A_x$ (daarin zit immers alle informatie over de voorgaande waarden).

Notatie $\overline{F}(x) = F \restriction A_x$

8.15 <u>Stelling</u>.

<u>Definitie door Transfinite Recursie</u>

Zij A welgeordend en zij $G: \mathcal{P}(A\times B) \to C$, dan is er precies één functie $F: A \to C$ zodat $F(x) = G(\overline{F}(x))$

Bewijs.

We bouwen de functie F van het begin af aan op, door alle mogelijke beginsegmenten $\overline{F}x$ te beschouwen.

Beschouw de verzameling K van alle $f: A_x \to C$ met $\mathrm{Dom}(f) = A_x$ voor zekere x en $(\forall y \in \mathrm{Dom}(f))(f(y) = G(\overline{f}(y))$

$K \neq \emptyset$ want $\emptyset \in K$.

<u>Bewering</u>: $F = \cup K$ is een functie en F voldoet aan de eisen.

(a) Als $f,g \in K$, dan $f \subseteq g$ of $g \subseteq f$.

$\mathrm{Dom}(f) = A_x$, $\mathrm{Dom}(g) = A_y$. A_x en A_y zijn beginsegmenten van A, dus is de een bevat in de andere.

Stel $A_x \subseteq A_y$.

Kies $c \in A_x$ en stel $f(c) \neq g(c)$, dan is er een kleinste element c_0 zodat $f(c_0) \neq g(c_0)$ en $\forall y < c_0\ (f(g) = g(y))$.

D.w.z. $\overline{f}(c_0) = \overline{g}(c_0)$. Maar dan geldt
$f(c_0) = G(\overline{f}(c_0)) = G(\overline{g}(c_0)) = g(c_0)$.
Contradictie. Ergo $f \subseteq g$.

(b) F is een functie.

Stel $\langle a,u\rangle \in F$ en $\langle a,v\rangle \in F$, dan zijn er functies $f,g \in K$ zodat $\langle a,u\rangle \in f$ en $\langle a,v\rangle \in g$.
Volgens (a) geldt $f \subseteq g$ of $g \subseteq f$. In beide gevallen hebben we $u = f(a) = g(a) = v$.

(c) Dom F = A.

Het is duidelijk dat $\mathrm{Dom}(F) \subseteq A$.
Stel Dom $F \neq A$, dan is er een kleinste element $a_0 \notin$ Dom F.
Dan $\overline{F}a_0 \in K$.
Echter per definitie geldt ook $\overline{F}a_0 \cup \{\langle a_0, G(\overline{F}a_0)\rangle\} \in K$
en dus $a_0 \in$ Dom F. Contradictie.

(d) F heeft de gevraagde eigenschap.

Kies $x \in A$, $x \in$ Dom F, dus is er een $f \in K$
zodat $x \in \mathrm{Dom}(f)$ en $f(x) = G(\overline{f}(x))$.
Maar $f \subseteq F$, dus ook $F(x) = G(\overline{F}(x))$

(e) F is uniek.

Stel F en F' voldoen aan de eisen en $F \neq F'$, dan is er een kleinste a_0 zodat $F(a_0) \neq F'(a_0)$ en
en $\forall y < a_0$ $(F(y) = F'(y))$. D.w.z. $\overline{F}(a_0) = \overline{F}'(a_0)$.
Maar dan geldt $F(a_0) = G(\overline{F}(a_0)) = G(\overline{F}'(a_0)) = F'(a_0)$.
Contradictie.

M.b.v. de definitie door recursie kunnen we bewijzen dat welgeordende verzamelingen nogal nauw samenhangen. De volgende

stelling zegt dat van ieder paar welgeordende verzamelingen de een opgevat kan worden als beginsegment van de ander.

8.16 <u>Stelling</u>. Laten A en B welgeordende verzamelingen zijn, dan is A isomorf met een beginsegment van B of B isomorf met een beginsegment van A.

Bewijs.
Definieer een functie F op een deelverzameling van A door

$F(a) = (\mu b \in B)[b \notin F''A_a]$ als $\exists b \in B\ (b \notin F''A_a)$.

De G van 8.15 voegt hier aan een deelverzameling van B het kleinste element dat er niet inzit.

Er zijn twee mogelijkheden: (1) $Dom(F) = A$ of (2) $Dom(F) \neq A$.

(1) $Ran(F) \subseteq B$ en $Ran(F)$ is een beginsegment van B of B zelf. Nl. als $y \in Ran(F)$ en $x < y$ dan $x \in Ran(F)$, anders hadden we x i.p.v. y gekozen als kleinste element bij de constructie van F.

(2) $Dom(F) \neq A$, dan $Ran(F) = B$ en F^{-1} is een isomorfisme van B op een beginstuk van A, nl. $Dom(F)$.

9. HET KEUZE AXIOMA.

In de wiskundige praktijk komt het vaak voor dat men een bepaalde keuze oneindig vaak moet herhalen.
Beschouw bijvoorbeeld de stelling van Bolzano-Weierstrass.
<u>Iedere oneindige deelverzameling van [0,1] bevat een verdichtingspunt</u>.

<u>Bewijs</u>. Zij $A \subseteq [0,1]$ en laat $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0$

Definieer $S_0 = [0,1]$,
laat S_n al gedefinieerd zijn zodat $\overline{\overline{S_n \cap A}} \geqslant \aleph_0$.

S_n wordt verdeeld in 2 gesloten deelsegmenten die S_n halveren. Minstens één van deze segmenten bevat oneindig veel punten van A. Kies dan dat segment als S_{n+1}.

We maken nu een sprong en zeggen: er is een aftelbare rij $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zodat $S_n \supsetneq S_{n+1}$ en $\lim_{n\to\infty} d(S_n) = 0$, waar d de lengte van het segment is.

Deze sprong is een extrapolatie van onze kennis. We weten alleen dat bij iedere S_n een volgende S_{n+1} gevonden kan worden; we vinden het dan plausibel dat er een functie $F: \mathbb{N} \to \mathcal{P}([0,1])$ bestaat met $F(n) = S_n$. Een bewijs hiervoor hebben we echter niet!!

Een preciese analyse leert ons dat we een keuze functie G tussengevoegd hebben die bij iedere S_n met $\overline{\overline{S_n \cap A}} \geqslant \aleph_0$ een (linker- of rechter-) deelsegment $G(n+1) = S_{n+1}$ aanwijst met $\overline{\overline{S_{n+1} \cap A}} \geqslant \aleph_0$.

Dan stellen we
$$\begin{cases} F(0) = S_0 \\ F(n+1) = G(F(n)) \end{cases}$$

Nu kunnen we het bewijs afmaken door aan te tonen dat voor zekere p $\{p\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ en p is verdichtingspunt van A.

Het keuze axioma preciseert wat we hierboven uitgevoerd hebben.

9.1 <u>KEUZE AXIOMA</u> (AC)

Zij V een niet-lege verzameling van niet-lege verzamelingen, dan is er een functie F zodat
$\mathrm{Dom}(F) = V$ en $\forall v \in V \ (F(v) \in v)$.

(Zermelo, 1909)

In symbolen:

$$V \neq \emptyset \wedge \forall v \in V \ (v \neq \emptyset) \to \exists F \ (\mathrm{Dom}(F) = V \wedge \forall v \in V \ (F(v) \in v))$$

We zullen een paar toepassingen van het keuze axioma geven.

9.2. <u>Stelling</u>. Als A niet eindig is, dan is A oneindig.

Bewijs.
We moeten aantonen dat als A niet eindig is, A een aftelbare deelverzameling heeft. Intuïtief doet men dit door achtereenvolgens steeds nieuwe punten te kiezen (dat kan want A kan niet in eindig veel stappen worden uitgeput).
Formeler: Zij $V = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$
en laat G de keuze functie op V zijn (toepassing AC)

Definieer: $F(0) = \emptyset$
$F(n+1) = F(n) \cup G(A - F(n))$

Merk op dat $\overline{\overline{F(n)}} = n$ en dat $A - F(n) \neq \emptyset$.
Wanneer we H definiëren door
$H(0) = G(A)$
$H(n+1) = G(A - F(n))$
dan geldt $H: \mathbb{N} \underset{1}{\leqslant} A$, d.w.z. A is oneindig.

9.3. <u>Stelling</u>. Zij P een partitie van A, dan $\overline{\overline{P}} \leqslant \overline{\overline{A}}$.

Bewijs.
Hierbij wordt natuurlijk aangenomen dat $\emptyset \notin P$ (als wèl $\emptyset \notin P$, dan telt hij toch slechts een keer mee, dus veel kwaad kan hij nooit doen).
Laat G de keuze functie van P zijn, dan $G: P \underset{1}{\leqslant} A$.

9.4. <u>Stelling</u>. Als er een surjectie van A op B is, dan is er een injectie van B in A.

9.5. <u>Stelling</u>. Als $\overline{\overline{A}}_n \leqslant \aleph_0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan $\overline{\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}} \leqslant \aleph_0$.

Bewijs:
Als $\overline{\overline{B}} \leqslant \aleph_0$ dan is er een F zodat $F: D \underset{1}{=} B$ en $D = \mathbb{N}$ of $D = \{0, \ldots, n\}$ voor zekere n, tenzij B leeg is (ga na). Dwz. de hierboven gegeven A_n's zijn eindig of aftelbaar. Het is geen beperking om te

veronderstellen dat $A_n \neq \emptyset$ (waarom ?).
Uit het gegeven volgt dat voor iedere n

$\mathcal{F}_n = \{F \mid F:D \overset{\sim}{\to} A_n\} \neq \emptyset$, waar D ofwel $\mathbb{N}$ of een verzameling $\{0,\ldots,k_n\}$ is.
Pas het keuze axioma toe op de familie $\{\mathcal{F}_n\}n \in \mathbb{N}$: er is een keuze functie $H:\mathbb{N} \to \cup \mathcal{F}_n$ zodat $H(n):D \overset{\sim}{\to} A_n$.
We hebben nu het probleem herleid tot stelling 5.14.
Stel $F_n := H(n)$ en het gevraagde volgt. ⊠

9.6 <u>LEMMA van ZORN</u>.

Zij A een niet-lege partiëel geordende verzameling met de eigenschap dat iedere keten een bovengrens heeft in A, dan heeft A een maximaal element.

Opmerking: een keten is een lineair geordende verzameling.

9.7 <u>De WELORDENINGSSTELLING</u>.

Iedere verzameling kan welgeordend worden.

9.8 <u>Het MULTIPLICATIEVE AXIOMA</u>.

Als A een verzameling van niet-lege, onderling disjuncte deelverzamelingen is, dan is er een verzameling C die met ieder element van A precies één element gemeen heeft.
(C heet de keuze verzameling.)

9.9 <u>Het MULTIPLICATIEVE AXIOMA</u> (2e versie).

Als $A_i \neq \emptyset$ $(i \in I)$, dan $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

(Cartesisch produkt volgt nog.)

De gelijkwaardigheid van deze uitspraken zullen we later aantonen.

Opmerking: in de meest voorkomende gevallen wordt het lemma van Zorn toegepast bij een ordening door inclusie, waarin de bedoelde bovengrens de vereniging van de keten is.

Enkele toepassingen.

9.10 Propositie. Zij R een ring. Ieder echt ideaal is bevat in een maximaal ideaal.

Bewijs.
Zij $I \subsetneq R$. Beschouw de collectie idealen J met $J \neq R$ en $I \subseteq J$.
Deze collectie is partiëel geordend door $\subseteq$.

Zij $\mathcal{K}$ een keten van idealen, dan is $I^* = \cup \mathcal{K}$ weer een ideaal (ga na) en $I^* \supseteq I$.
Stel $I^* = R$, dan $1 \in I^*$, dus is er een $J \in \mathcal{K}$ met $1 \in J$.
Contradictie, want J was echt.

I^* is dus een echt ideaal dat alle idealen uit $\mathcal{K}$ bevat.
Pas het lemma van Zorn toe:

Er is een maximaal ideaal dat I omvat.

Opmerking: we kunnen de Propositie verscherpen tot:
bij iedere $I \subseteq R$ en bij iedere $x \notin I$ is er een maximaal ideaal I_m zodat $I \subseteq I_m$ en $x \notin I_m$.

9.11 Propositie. Bij iedere consistente verzameling zinnen van de predicatenlogica is er een maximaal consistente uitbreiding.

Bewijs.
Zij Γ een consistente verzameling zinnen.
Beschouw de collectie $\mathcal{C}$ van alle consistente uitbreidingenvvan Γ. Zij $\mathcal{K}$ een keten in $\mathcal{C}$ en $\Delta = \cup \mathcal{K}$, dan is Δ consistent. Stel immers Δ inconsistent, dan $\Delta \vdash A \wedge \neg A$,
d.w.z. er zijn $B_1,\ldots,B_n \in \Delta$ zodat $B_1,\ldots,B_n \vdash A \wedge \neg A$.
Maar $B_i \in \Gamma_i \in \mathcal{K}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ en $\mathcal{K}$ is lineair geordend, dus een van de Γ_i's omvat de overigen. Zeg $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ voor $i = 1,\ldots,n$, dan $\Gamma_j \vdash A \wedge \neg A$. Contradictie, want Γ_j was

consistent. Dus Δ is consistent.

Voorts omvat Δ alle Γ's uit $\mathcal{K}$ en $\Delta \supset \Gamma$.

We kunnen nu Zorn's lemma toepassen:

Er is een maximale consistente uitbreiding van Γ.

9.12 <u>Propositie</u>. Voor iedere A en B geldt
$A \underset{1}{\leqslant} B$ of $B \underset{1}{\leqslant} A$.

Bewijs.

Geef welordeningen van A en B.
Volgens 8.16 is A isomorf met een beginsegment of omgekeerd.
Hiermee is het gevraagde aangetoond. ⊠

9.13 <u>Propositie</u>. Iedere partiële ordening kan uitgebreid worden tot een totale ordening.

Bewijs.
Laat A partiëel geordend worden door $\leqslant$.
Beschouw de collectie P van alle partiële ordeningen die $\leqslant$ uitbreiden (dat zijn dus deelverzamelingen van $A \times A$).
Pas op P, partiëel geordend door $\subseteq$ het lemma van Zorn toe.
Laat zien dat het maximale element een totale ordening is. ⊠
(Voor een ander bewijs zie Formele Logica, blz. 78.)

9.14 <u>Propositie</u>. Als $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ en $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$,
dan $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.

Bewijs.
We gebruiken hier feiten over ordinalen die in §13 bewezen worden. Lees het bewijs pas na §13.

Het is voldoende om $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ te nemen.

Zij $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$ en laat α het kleinste ordinaal getal zijn met $\alpha \underset{1}{=} A$ (toepassing van welordeningsstelling).

Ga na dat α een limietordinaal is.

We gaan α opsplitsen in even en oneven ordinalen.

(1) Voor iedere α is er een n zodat $\alpha = \lambda+n$ (λ is limiet of 0)
(inductie naar α)

(2) Def. α even := n even

α oneven := n oneven

(3) Definieer $F_0 : \alpha \underset{1}{\leqslant} \alpha$ door

$F(\lambda+n) = \lambda+2n$. Omdat α een limiet is is F een injectie in α.

Definieer $F_1 : \alpha \underset{1}{\leqslant} \alpha$ door

$F(\lambda+n) = \lambda+2n+1$.

(λ is in (3) een limiet of 0)

(4) Definieer $F : \alpha\times\{0\} \cup \alpha\times\{1\} \underset{1}{=} \alpha$ door

$F(\beta,i) = F_i(\beta)$. Ga na dat F een bijectie is. ⊠

Opmerking: Eveneens geldt (met AC)

$$\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0 \wedge \mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{m}.\mathfrak{n} = \mathfrak{m}.$$

9.15 <u>Definitie</u>. Een filter $\mathcal{F}$ op een verzameling A is een deelverzameling van $\mathcal{P}(A)$ met de eigenschappen

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(2) $X,Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$

(3) $X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.

<u>Vb</u>. (a) $\mathcal{F}_1 = \{X \mid X \supseteq B\}$ voor zekere niet-lege $B \in \mathcal{P}(A)$

(b) $\mathcal{F}_2 = \{X \mid \overline{\overline{A - X}} < \aleph_0\}$ (het filter van de co-eindige verzamelingen).

9.16 <u>Definitie</u>. $\mathcal{F}$ is een ultrafilter (UF) als $\mathcal{F}$ maximaal is t.o.v. de inclusierelatie (d.w.z. als $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}$).

<u>Vb</u>. (c) $\mathcal{F}_a = \{X \mid a \in X\}$ is een UF ($a \in A$).

Zo'n filter $\mathcal{F}_a$ heet een hoofdfilter (denk aan hoofdideaal)

9.17 <u>Definitie</u>. $\mathcal{F}$ heet vrij als $\cap \mathcal{F} = \emptyset$

Opmerking: $\mathcal{F}$ is vrij $\Longleftrightarrow$ Er is geen punt dat in alle examplaren van $\mathcal{F}$ zit.

<u>Vb</u>. Het filter uit vb.(b) is vrij (ga na).

9.18 <u>Lemma</u>. $\mathcal{F}$ is een UF $\Longleftrightarrow \forall X \subseteq A\ (A \in \mathcal{F} \vee \overline{A} \in \mathcal{F})$

Bewijs.

$\Rightarrow$ Stel $X_0 \notin \mathcal{F}$.

Beschouw de verzameling $\mathcal{F}^*$ die men krijgt door alle verzamelingen X te nemen die de doorsneden van $\overline{X_0}$ met exemplaren Y van $\mathcal{F}$ bevatten.

Bewering: $\mathcal{F}^*$ is een filter.

(1) Stel $\emptyset \in \mathcal{F}^*$, dan geldt voor zekere $Y \in \mathcal{F}$

$\overline{X_0} \cap Y = \emptyset$. Dit kan niet, omdat dan $X_0 \supseteq Y$ en dus $X_0 \in \mathcal{F}$. I.h.b. volgt hieruit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$.

(2) $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}^*$, dan $Z_1 \quad \overline{X_0} \cap Y_1$, $Z_2 \quad \overline{X_0} \cap Y_2$

en $Z_1 \cap Z_2 = \overline{X_0} \cap (Y_1 \cap Y_2) \in \mathcal{F}^*$.

(3) geldt per definitie.

Omdat $\mathcal{F}$ maximaal is geldt $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$

En dus $\overline{X_0} \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$ Stel $\mathcal{F}$ is niet maximaal, dan is er een $\mathcal{F}'$ zodat $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$, dus is er een $X \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}$.

$X \notin \mathcal{F} \Rightarrow \overline{X} \in \mathcal{F}$, dus $\overline{X} \in \mathcal{F}'$.

Hieruit volgt $X \cap \overline{X} = \emptyset \in \mathcal{F}'$. Contradictie.

9.19. <u>Stelling</u>. Ieder filter is bevat in een ultra filter.

Bewijs.

Beschouw de verzameling van alle $\mathcal{F}'$ met $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$, partiëel geordend door inclusie.

Pas hier Zorn's lemma toe.

10. ONEINDIGE CARTESISCHE PRODUCTEN.

10.1 <u>Definitie</u>. $\prod_{i\in I} A_i = \{f \in (\bigcup A_i)^I \mid f(i) \in A_i\}$

10.2 OPGAVE. Bewijs dat in het eindige geval de definities isomorfe verzamelingen opleveren.

10.3 <u>Definitie</u>. $\sum_{i\in I} \bar{\bar{A}}_i = \overline{\overline{\bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}}}$

$$\prod_{i\in I} \bar{\bar{A}}_i = \overline{\overline{\prod_{i\in I} A_i}}$$

10.4 <u>Stelling</u>. Onder aanname van AC geldt

$$(\forall i\in I)(A_i \neq \emptyset) \rightarrow \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

Bewijs.
Beschouw de keuze functie f van de collectie $\{A_i \mid i \in I\}$. $f \in \prod_{i\in I} A_i$, dus $\prod A_i \neq \emptyset$. ⊠

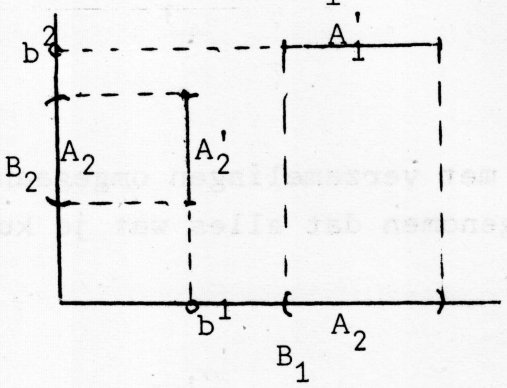
Laat zelf de omkering zien.

10.5 <u>Stelling van König</u>.

Beschouw twee collecties $\{\mathfrak{m}_i \mid i \in I\}$ en $\{\mathfrak{n}_i \mid i \in I\}$ met de eigenschap $\mathfrak{m}_i < \mathfrak{n}_i$ voor alle $i \in I$, dan geldt

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{m}_i < \prod_{i\in I} \mathfrak{n}_i .$$

Bewijs.
Het is geen beperking te veronderstellen dat $B_i \cap B_j = \emptyset$ als $i \neq j$ en $A_i \subsetneq B_i$ en $A_i \neq \emptyset$.
Kies in iedere B_i een $b^{(i)}$ zodat $b^{(i)} \in B_i - A_i$ (<u>AC</u>)



definieer $A'_i = \prod_{j\in I} D_j$

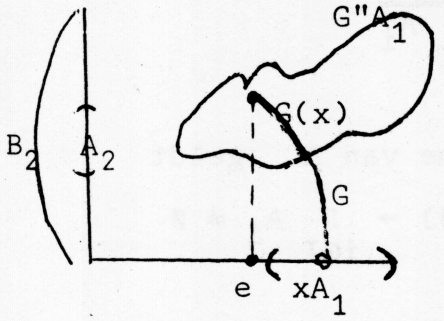
met $D_j = \begin{cases} A_i & \text{als } j = i \\ \{b^j\} & \text{als } j \neq i \end{cases}$

De verzamelingen A_i' zijn gelijkmachtige copieën van de A_i's in ΠB_i. Bovendien geldt $A_i' \cap A_j' = \emptyset$ als $i \neq j$ (zie de tweedimensionale figuur).

Definieer F die alle A_i's bijectief op de A_i''en afbeeldt.

$F: \cup A_i \preccurlyeq \Pi B_i$, dus $\Sigma \mathfrak{m}_i \leqslant \Pi \mathfrak{n}_i$.

Stel nu $\Sigma \mathfrak{m}_i = \Pi \mathfrak{n}_i$, d.w.z. $G: \cup A_i \preccurlyeq \Pi B_i$.



Bepaal voor iedere $i \in I$

$G''A_i$ (in figuur voor A_1).

Bepaal vervolgens de projectie van $G''A_i$ op B_i, d.i.

$\{e \mid \exists x \in A_i)(G(x) = f \wedge f(i) = e)\} = B_i^*$

(f is een punt in het "product")

De afbeelding $\lambda x.(G(x))(i)$ is een surjectie van A_i op B_i^*. M.b.v.het keuze axioma (stelling 9.4) maken we een injectie $h: B_i^* \preccurlyeq A_i$.

Dus $\overline{\overline{B}}_i^* \leqslant \overline{\overline{A}}_i < \overline{\overline{B}}_i$, d.w.z. $B_i - B_i^* \neq \emptyset$.

Kies met het keuze axioma in iedere $B_i - B_i^*$ een punt, d.w.z. we hebben een g met $g \in \Pi B_i$ en $g(i) \in B_i - B_i^*$. Wegens de bijectiviteit van G is er een $a \in \cup A_i$ zodat $G(a) = g$. Laat $a \in A_1$ (voor 't gemak). Dan $g \in G''A_1$, maar we hadden g juist zó gekozen dat zijn projectie $g(1)$ op B_1 buiten B_1^*, d.i. de projectie van $G''A_1$ viel. Contradictie.

Dus $\Sigma \mathfrak{m}_i < \Pi \mathfrak{n}_i$. ⊠

11. DE PARADOXEN.

Tot dusverre hebben we slordig met verzamelingen omgegaan. Eigenlijk hebben we steeds aangenomen dat alles wat je kunt omschrijven een verzameling is.

Dit komt neer op het COMPREHENSIE PRINCIPE

Zij $A(x)$ een eigenschap van verzamelingen, dan is er een verzameling X zodat $x \in X \leftrightarrow A(x)$.

Anders gezegd : $\{x \mid A(x)\}$ bestaat.

Dit principe blijkt onheil te brengen, zoals Russell al opmerkte.

11.1 <u>Russell's paradox</u>.

Beschouw $y = \{x \mid x \notin x\}$.

$y \in y \leftrightarrow y \notin y$. Contradictie.

Uitweg: zo'n verzameling y bestaat niet.

11.2 <u>Cantor's paradox</u>.

Beschouw $y = \{x \mid x=x\}$ (de verzameling van alle verzamelingen).

Beschouw $z = \mathcal{P}(y)$.

$x \in z \rightarrow x \subseteq y$, d.w.z. x is een verzameling, dus $x \in y$.

Derhalve $z \subseteq y$ en dus (trivialerwijze) $z \underset{1}{\leqslant} y$.

Ofwel $\mathcal{P}(y) \underset{1}{\leqslant} y$. Contradictie met de stelling van Cantor.

Voor de paradox van <u>Burali-Forti</u>, zie 13.15.

Het blijkt dat de paradoxen optreden bij "te grote" verzamelingen. Een voor de hand liggende oplossing lijkt om de omvang van verzamelingen beperkt te houden.

Het optreden van paradoxen was o.a. aanleiding om de verzamelingsleer systematisch aan te pakken via de <u>axiomatische methode</u>.

Bezwaar van de kardinalen à la Frege-Russell.

Laten we aannemen dat de equivalentieklassen $\overline{\overline{x}}$ verzamelingen zijn, dan is in het bijzonder $\underline{1} = \overline{\overline{\{1\}}}$ een verzameling A. Voor iedere verzamelingen x geldt dat $\{x\} \in A$. Hieruit volgt

dat iedere verzameling x een element is van $\cup A$, d.w.z. $\cup A$ is de verzameling van alle verzamelingen. We concluderen dat de Frege-Russell kardinalen dus geen verzamelingen kunnen zijn (uitgezonderd de $\underline{0}$). Hiermee is een ernstig bezwaar tegen de Frege-Russell kardinalen geopperd: wat doe je met dingen die niet bestaan?
Voor een uitweg zie §15.

In de verzamelingsleer noemt men objecten die te groot zijn om als verzameling ongestraft mee te kunnen doen (zoals de "verzameling van alle verzamelingen") wel (echte) klassen.

12. AXIOMA'S VAN DE VERZAMELINGENLEER.

Het principe van de axiomatische methode is u (hopelijk/waarschijnlijk) bekend uit de meetkunde.
Als grondbegrippen nemen we aan

verzameling

element zijn van - $\in$.

Meer blijkt niet nodig te zijn. Omdat verzamelingen zelf weer als elementen kunnen optreden is het niet nuttig om apart over 'elementen' te praten.
Vandaar dat we ook maar een soort variabelen hebben: x,y,z,..., die zowel als element of als verzameling kunnen optreden, d.w.z. links en rechts van $\in$: $x \in y$.

De formalisering gebeurt in de eerste orde predicatenlogica.

De axioma's regelen bijna allemaal het bestaan van verzamelingen. Let wel, we mogen nu alleen over verzamelingen praten als we het bestaan op grond van de axioma's eerst aangetoond hebben.

De nu volgende axioma's zijn van het systeem van Zermelo-Fraenkel (aangeduid als ZF):

ERRATA VERZAMELINGENLEER

+ n betekent n^e regel van boven
- n betekent n^e regel van onderen.

blz 4	+ 6	n = 1	wordt	n + 1.
blz 7	+ 5	$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n.n + 1]$	wordt	$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n,n + 1]$
blz 7	+ 4	bineaire	wordt	binaire
blz 9	+ 14	{0}	wordt	$\mathbb{R}$
blz 14	- 6	voeg toe,"want Dom (Ø) = Ø = B."		
blz 15	+ 8	24	wordt	29
	- 7	symmetrisch	wordt	transitief.
blz 19	+ 7	⟨ 0,2 ⟩	wordt	⟨ 2,0 ⟩
	+ 9	⟨ 2,0 ⟩		⟨ 0,2 ⟩
blz 23	- 9	f	wordt	f' (2×)
blz 27	+ 11	hele regel	wordt	f' (2×)
		$F(n) = K_{\{n\}}$ (d.i. de karakteristieke functie van {n}, zie 7.5).		
blz 28	+ 14	$\mathbb{N}$	wordt	$2^{\mathbb{N}}$
blz 33	- 11	"Alle dichtgeordende"	wordt	"Alle aftelbare dichtgeordende.
blz 35	+ 2	n.n !	wordt	(n+1)n!
blz 38	+ 2	⊂	wordt	⊃
blz 48	+ 13	hopenlijk	wordt	hopelijk
blz 52	- 3	x^y	wordt	y×x.

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER maart 1974.

1. Beschouw deelverzamelingen van een oneindige verzameling V. Definieer $A+B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Definieer $A \sim B$ dan en slechts dan als $A+B$ eindig is.

   i) Bewijs dat $\sim$ een equivalentie relatie is.

   ii) Wat zijn $[\phi]$, $[V]$?

2. i) Zij $f:V \to W$. Definieer voor $x,y \in V$ $x \sim y$ dan en slechts dan als $f(x) = f(y)$. Bewijs dat $\sim$ een equivalentie relatie is.

   ii) Zij $V^* = V/\sim$. Definieer een injectieve $f^*:V^* \to W$.

3. a. Laat $g:A \to B$ en $f:B \to C$ injectief zijn. Bewijs dat $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$

   b. Laat $f:A \to B$ en $g:B \to A$ zijn. Bewijs dat

   i) f is bijectief $\Leftrightarrow$ f^{-1} bijectief is,

   ii) f is surjectief $\Leftrightarrow$ f een rechterinverse heeft,

   iii) f is injectief $\Leftrightarrow$ f een linkerinverse heeft,

   iv) als $f \circ g = \lambda x \in B.x$ dan is f surjectief en g injectief.

   v) als f een rechter- en linkerinverse heeft, g en g^*, dan $g = g^*$.

   c. Geef voorbeeld van een f en een g zodat f injectief is maar fog niet injectief is. Met andere woorden: Bewijs dat f injectief $\not\Rightarrow$ $f \circ g$ injectief.

4. Laat $f:B \to C$ een functie zijn. Bewijs dat f surjectief is $\Leftrightarrow$ voor elke A en $h:A \to C$ er een $g:A \to B$ is zodat $f \circ g = h$.
   $[f^*:B \to A$ is linker inverse van f $\Leftrightarrow f^* \circ f = id_A]$.

5. Bewijs Lemma 4.17.

6. Geef bewijzen van of tegenvoorbeelden tegen de volgende uitspraken over verzamelingen $A,B \subset V$ en funkties $f:V \to V$.

i) $f''f^{-1''}A = A$

ii) $f^{-1''}f''A = A$

iii) $(f\restriction A)''f^{-1''}A = A$

iv) $f''(A \cap B) = f''A \cap F''B$

v) $f^{-1''}\bar{A} = \overline{f^{-1''}A}$

vi) $f''\bar{A} = \overline{f''A}$.

7. i) Bewijs dat $\mathbb{N} \cup A$ aftelbaar is waar $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ een eindige verzameling van objecten niet in $\mathbb{N}$ is.

ii) Bewijs dat iedere deelverzameling van een aftelbare (eindige) verzameling aftelbaar (eindig) is.

iii) Bewijs dat $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ aftelbaar (eindig) is als elke A_k aftelbaar (eindig) is. (Inductie naar n).

iv) Bewijs dat $\mathbb{Q} =_1 \mathbb{N}^2 =_1 \mathbb{N}$.

8. Zijn de volgende uitspraken over verzamelingen A,B,C en D juist of onjuist ? (Motiveer !).

i) $A \leqslant_1 B,\ C \leqslant_1 D \Rightarrow A \cup C \leqslant_1 B \cup D$.

ii) " " $\Rightarrow A \cap C \leqslant_1 B \cap D$.

iii) " " $\Rightarrow A \times C \leqslant_1 B \times D$.

iv) " " $\Rightarrow A^C \leqslant_1 B^D$

v) $A \leqslant_1 A \cup B$.

vi) $A \cap B \leqslant_1 A$.

vii) $A \leqslant_1 A^B$.

viii) $A \leqslant_1 B^A$ als $B \neq \phi$.

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER.

6 MAART 1974

1. a. Schrijf de rij 1,2,4,8,16,... m.b.v. de λ-notatie.

   b. Bereken $(\lambda x.x^2+1)(3)$

   c. Schrijf als functie van x (m.b.v. de λ-notatie) $x+y$.

   d. Geef m.b.v. de λ-notatie een bijectie van $A \times B$ op $B \times A$.

   e. Schrijf als verzameling $\lambda x.F(G(x))$.

2. Schrijf uit m.b.v. de definitie van geordend paar het drietal $< 1,2,3 >$.

3. Bewijs Lemma 2.5 en de minst triviale van 2.8.

4. a. Bewijs dat als $A \times B = \phi$ dan $A = \phi$ of $B = \phi$.

   b. Geldt $A \times B = B \times A$ dan en slechts dan als $A = B$? Zo nee, hoe kunnen wij het rechterlid aanvullen opdat het wel klopt?

5* Definieer een (niet lege) verzameling A zodat $A \times A \subseteq A$.

6. Schrijf de verzameling van verzamelingen $\{\{0\},\{0,2\},\{0,2,4\},\{0,2,4,6\},...\}$ als een geindiceerde familie.

7. Schrijf als gegeneraliseerde doorsnede de kleinste ondergroep van $\mathfrak{G}$ die het element a_1 bevat.

8. a. Definieer een relatie R zodat i) R geen functie is en
   ii) $\breve{R}$ een functie is.

   b. Zij R een equivalentie relatie op A zodat R een functie is. Bewijs dat er precies één zo'n R bestaat.

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER 18 MAART 1974.

Bewijs alles heel precies. (H.P. Barendregt).

1. Bewijs dat $\mathbb{Q} =_1 \mathbb{N}$.

2. Zij $\mathbb{N}^* = \{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid x_i \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Bewijs dat $\mathbb{N}^* =_1 \mathbb{N}$.

3. A is overaftelbaar $\Leftrightarrow_{\text{Def.}}$ $A \not\leq_1 \mathbb{N}$.

   i) Zij $B \subset A$, A overaftelbaar, B aftelbaar. Bewijs $A-B =_1 A$.

   ii) Idem met B eindig. (Gebruik 3i)).

4. Bewijs dat $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ irrationaal}\} =_1 \mathbb{R}$.

5. i) Bewijs dat $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_1 \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. (Hint: $\geq_1$: triviaal, $\leq_1$: codeer rijtjes $n_0 n_1 \ldots$ in rijtjes met alleen 0 en 1.)

   ii) Bewijs dat $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_1 \{0,\ldots,n\}^{\mathbb{N}}$.

6. Bewijs dat $\mathbb{R} =_1 \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

7. Bewijs dat $\{f \mid f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge f \text{ continu}\} =_1 \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   Hint: Een continue f is volledig bepaald door $f \restriction \mathbb{Q}$.

8. <u>Bewijs</u>: $\mathbb{R}^2$ heeft een aftelbare basis voor zijn topologie, d.w.z. er is een collectie open verzamelingen $\Theta = \{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zodat iedere open verzameling vereniging is van verzamelingen uit Θ.

9. Zij $A \subset \mathbb{R}^2$. $x \in A$ is geisoleerd $\Leftrightarrow_{\text{Def.}}$ er is een $O \subset \mathbb{R}^2$ zodat $\{x\} = O \cap A$ en O open is. $\hat{A} = \{x \in A \mid x \text{ geisoleerd}\}$. Bewijs dat $A \leq_1 \mathbb{N}$.

Praktikum Verzamelingenleer 27 maart 1974.

Doe niet meer dan nodig is. (J.M. Cornwell).

1. Bewijs 6.7 a), f) en g) van het dictaat.
2. Bewijs dat $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^{\{1,\ldots,n\}} \mid f(1) \in A_1 \wedge f(2) \in A_2 \wedge \ldots \wedge f(n) \in A_n\}$.
3. Als A een partieel geordende verzameling is en $A =_1 B$, dan kan B partieel geordend worden.
4. i) Bewijs dat $\aleph_0 \cdot \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

   ii) Bewijs dat $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_1 2^{\mathbb{R}}$.

   iii) Wat is $1^{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$.

   iv) Bereken $\overline{\overline{\mathbb{C}^{\mathbb{C}}}}$.

   v) Bereken $\overline{\overline{\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \mid f \text{ continu}\}}}$.
5. Definieer $\langle A_1, <_1 \rangle \dot{\cup} \langle A_2, <_2 \rangle = \langle A_1 \dot{\cup} A_2, < \rangle$ zodat $x < y$ dan en slechts dan als $x \in A_1$ en $y \in A_2$, of

   $x, y \in A_1$ en $x <_1 y$, of

   $x, y \in A_2$ en $x <_2 y$.

   Bewijs dat $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \dot{\cup} \langle \mathbb{Q}_0^+, < \rangle \simeq \langle \mathbb{Q}, < \rangle$.
6. i) Geef twee niet isomorfe dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten $\langle A_1, <_1 \rangle$ en $\langle A_2, <_2 \rangle$.

   ii) Idem zodat $A_1 =_1 A_2$.
7. i) Bewijs dat $\mathbb{N} \underset{1}{<} \{< \mid < \text{ is een lineaire ordening op } \mathbb{N}\}$.

   ii) Bewijs: $\overline{\overline{V}} \geqslant 2$ en V dicht geordend $\Rightarrow$ V niet eindig.
8. Een getal $a \in \mathbb{R}$ heet <u>algebraisch</u> als er een polynoom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is met $a_i \in Q$ en $f(a) = 0$. $a \in \mathbb{R}$ heet <u>transcendent</u> als a niet algebraisch is.

   Bewijs dat er transcendente reële getallen bestaan. [Hint: Bewijs $\{f(x) \mid f \text{ is een polynoom met rationale coëfficienten}\} =_1 \mathbb{N}$].

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER

3 april '74

1. i) Bewijs dat twee dichtgeordende aftelbare verzamelingen met eindpunten isomorf zijn.

   ii) Doe IV.5. opnieuw met nog minder werk.

2. Bewijs dat een dichtgeordende verzameling met minstens twee elementen oneindig en niet welgeordend is.

3. Definieer op $\mathbb{N}^2$ de lexicografische ordening $<<$: $< n,m > << < n',m' >$ dan en slechts dan als $n < n'$, of $n = n'$ en $m < m'$. Bewijs dat $< \mathbb{N}, << >$ welgeordend is.

4. i) Zij A geordend zodat $\forall x \in A\ A_x$ eindig is. Bewijs dat A welgeordend is.

   ii) $Z = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n \forall m > n\ f(m) = 0\}$. Stel $f,g \in Z$. Definieer $f < g \iff f(a) < g(a)$ waar a de grootste x is zodat $f(x) \neq g(x)$. Bewijs dat $< Z, < >$ welgeordend is.

5. Zij A een partieelgeordende verzameling, $B \subset A$ is een <u>antiketen</u> dan en slechts dan als $b_1, b_2 \in B \Rightarrow \neg b_1 \leqslant b_2 \wedge \neg b_2 \leqslant b_1$.

   i) Construeer een partieelgeordende verzameling meteen overaftelbare antiketen.

   ii) Bewijs dat er een overaftelbare partieelgeordende verzameling is zodat alle antiketens aftelbaar of eindig zijn.

   iii)** Hoeveel overaftelbare antiketens heeft $< \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset >$?

6. i) Bewijs dat er $2^{\aleph_0}$ bijecties van $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zijn.

   ii) Bewijs dat er $2^{\aleph_0}$ welordeningen op $\mathbb{N}$ zijn.

z.o.z.

7. i) Zij A een partieelgeordende verzameling. Zij $B \subset A$.
Definieer 1. $a \in A$ is bovengrens van B,
2. $a \in A$ is supremum van B.

ii) Construeer een partieelgeordende verzameling zodat iedere twee punten een bovengrens hebben, maar niet iedere twee punten een supremum hebben.

8. i) Definieer recursief $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met beginsegment
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144...

ii) Bewijs $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1}$

N.B. f(n) geeft de groei van een konijnenfamilie aan, en heet de Fibbonaci rij.

9. Definieer m.b.v. transfinite inductie een functie F met
$\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{N}^2$. $F(\langle n,m \rangle) = \mathcal{P}(\cup\{F(\langle a,b \rangle) \mid \langle a,b \rangle \ll \langle n,n \rangle\})$

a. Bereken:

i) $F(\langle 0,0 \rangle)$.

ii) $F(\langle 0,3 \rangle)$.

b. Bewijs:

i) $\langle a,b \rangle \ll \langle a',b' \rangle \Rightarrow F(\langle a,b \rangle) \in F(\langle a',b' \rangle)$,

ii) $\langle a,b \rangle \ll \langle a',b \rangle \Rightarrow F(\langle a,b \rangle) \subset F(\langle a',b' \rangle)$.

NB. $\ll$ is de welordening van som 3.

Praktikum Verzamelingenleer 24 april 1974.

In opg. 1 en 2 zijn n,m variabelen over de kardinalen.

1. (i) Bewijs: AC $\Rightarrow$ $n+n = n$ voor alle kardinalen $n \geqslant \aleph_0$.
   Aanwijzing: gebruik AC $\Leftrightarrow$ ZORN; neem $\bar{\bar{N}} = n$, dus $n+n = \overline{\overline{N \times \{1,2\}}}$.
   Beschouw de verzameling A van funkties, die gedefinieerd is door:
   $f \in A \Leftrightarrow$ er is een $M \subseteq N$ zodat $\mathrm{Dom}(f) = M \times \{1,2\}$, $\mathrm{Ran}(f) = M$ en $f : M \times \{1,2\} \to M$ is een bijectie.
   Pas nu ZORN toe op A.

   (ii) Bewijs: AC $\Rightarrow$ $n.n = n$ voor alle $n \geqslant \aleph_0$.
   (Gebruik bijna dezelfde methode als bij (i)).

   (iii) Bewijs: AC $\Rightarrow$ $n+m = n.m = \max(n,m)$ voor alle $n,m \geqslant \aleph_0$.

   (iv) Zij A oneindig, $B \subset A$ en $\bar{\bar{B}} < \bar{\bar{A}}$. Bewijs: $\overline{\overline{A-B}} = \bar{\bar{A}}$.

2. Bewijs: AC $\Rightarrow$ $\forall n,m\ (n \leqslant m \vee m \leqslant n)$.
   Aanwijzing: Zij $\bar{\bar{N}} = n$, $\bar{\bar{M}} = m$. Beschouw $A = \{f \subseteq N \times M \mid \langle x_1, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x_2, y_2 \rangle \in f \to [x_1 = x_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2]\}$ en gebruik ZORN.

3. Zij A een verzameling. Definieer: $\mathcal{P}_\omega(A) = \{B \subseteq A \mid \bar{\bar{B}} < \aleph_0\}$.
   Bewijs: $\bar{\bar{A}} \geqslant \aleph_0 \Rightarrow \bar{\bar{A}} = \overline{\overline{\mathcal{P}_\omega(A)}}$.

4. Noem de volgende uitspraak ZORN':
   Elke partieel geordende verzameling waarin elke keten een kleinste bovengrens heeft, bezit een maximaal element.
   Bewijs: ZORN' $\Leftrightarrow$ ZORN.
   (Bekijk voor het bewijs van $\Leftarrow$ de collectie ketens in de beschouwde verzameling en pas ZORN toe op die collectie, die door inclusie geordend is.)

5. Bewijs stelling 9.4 uit het diktaat.

6. (i) Bewijs: A is welgeordend door $<$ $\Leftrightarrow$ er is geen oneindig dalende keten $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots\ldots$ in A.

   (ii) Geef een welordening van $\mathbb{N}[X]$, de verzameling van polynomen in X met coëfficienten $\in \mathbb{N}$.

   (iii) Zij $A = \{A_i \mid i \in I\}$ een door $<$ welgeordende collectie verzamelingen, en A_i door $<_i$ welgeordend ($\forall i \in I$).
   Geef een welordening voor $\cup A$.

7. Bewijs dat er een vrij ultrafilter is.

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER 1 mei 1974.

1. (i) $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ zijn filters op een verzameling A.

<u>Bewijs</u>: $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ is een filter op A.

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ is een filter op A $\Longleftrightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ of $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

(ii) Zij A eindig.

<u>Bewijs</u>: $\mathcal{F}$ is hoofdfilter op A $\Longleftrightarrow \mathcal{F}$ is ultrafilter op A.

<u>Bewijs</u>: er is geen vrij filter op A.

(iii) Er zijn minstens $2^{\aleph_0}$ ultrafilters op $\mathbb{R}$

Er zijn minstens $2^{\aleph_0}$ vrije filters op $\mathbb{Q}$

Er zijn minstens $2^{\aleph_0}$ vrije filters op $\mathbb{N}$.

(iv) Zij $\mathcal{F}$ een UF op A. Dan is voor alle $B, C \subseteq A$:

$$B \cup C \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow B \in \mathcal{F} \text{ of } C \in \mathcal{F}.$$

(v) Als $\mathcal{F}$ een vrij UF op A is, dan bevat $\mathcal{F}$ het filter van de coëindige deelverzamelingen van A.

2. (i) Definieer op $\prod_{i \in I} A_i$ de volgende relatie: als $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$ dan $f \sim g \Longleftrightarrow$ voor bijna alle $i \in I$ is $f(i) = g(i)$.

Hierbij wil "voor bijna alle" zeggen: "voor alle op eindig veel na".

<u>Bewijs</u> dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

(ii) We generaliseren deze "bijna alle" -terminologie aldus:

zij $\mathcal{F}$ een filter op I en $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$, dan

$$\text{Def. } f \sim g \Longleftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}.$$

<u>Bewijs</u>: $\sim$ is equivalentierelatie.

(iii) Met welk filter correspondeert de equivalentierelatie van (i)?

3. (i) <u>Bewijs</u>: Stelling van König $\Rightarrow$ AC.

Hint: gebruik AC $\Longleftrightarrow$ Multiplicatieve Axioma (2de versie)

(ii) Bewijs met de stelling van König:

Als $\{\mathcal{M}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een collectie kardinalen is met $\mathcal{M}_{n+1} > \mathcal{M}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ en $\mathcal{M} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$, dan is $2^{\aleph_0} \neq \mathcal{M}$.

4. Noem een verzameling A "gegrond", als er geen oneindige rij $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is met $x_0 \in A$ en $(\forall n \in \mathbb{N})\, x_{n+1} \in x_n$.

Zij G de verzameling van alle gegronde verzamelingen.

Bewijs dat deze definitie paradoxaal is.

z.o.z.

5. Bewijs uit de axioma's van ZF:

(i) $\bigcup \mathcal{P}(x) = \bigcup\{x\} = x$

(ii) $\bigcup x \neq \{x\}$

(iii) $\neg \exists x \forall y (y \notin y \rightarrow y \in x)$

(iv) er is een verzameling A zodat $x \in A \Longleftrightarrow$ er is een $n \in \mathbb{N}$ zodat $x = \{^{2n}\phi\}^{2n}$.

Hint: def. $A_0 = \{\phi\}$

$A_{n+1} = \{\{A_n\}\}$

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

6. Bewijs dat er verzamelingen A en B zijn zodat $A \times B = A \cap B$.

Hint: def. $A_0 = \{a\}$, $B_0 = \{b\}$, met $a \neq b$.

$A_{n+1} = A_n \cup (A_n \times B_n)$, $B_{n+1} = B_n \cup (A_n \times B_n)$

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

7. (i) Bewijs stelling (12.2) b en c.

(ii) Opgave 12.3 diktaat.

(iii) Bewijs de existentie van x-y.

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER 8 MEI 1974

1. Bewijs:

(i) $\mathrm{Lim}(\lambda) \wedge \alpha<\lambda \rightarrow \exists\beta(\alpha<\beta<\lambda)$

(ii) $\mathrm{Fin}(\alpha) \wedge \beta<\alpha \rightarrow \mathrm{Fin}(\beta)$

(iii) $\mathrm{Fin}(\alpha) \rightarrow \mathrm{Fin}(\alpha+1)$

(iv) $\forall\alpha(\alpha=\phi \vee \mathrm{Suc}(\alpha) \vee \mathrm{Lim}(\alpha))$

(v) $\alpha \in \beta \rightarrow \alpha \subsetneq \beta$

(vi) $\alpha+1 = \beta+1 \rightarrow \alpha = \beta$

(vii) $\alpha \in \beta \rightarrow (\alpha+1 \in \beta \vee \alpha+1=\beta)$

2. Bewijs:

(i) $(\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge x \subseteq \alpha \wedge \forall\beta(\beta<\alpha \rightarrow \exists\gamma(\gamma \in x \wedge \beta \in \gamma))) \rightarrow \alpha = \bigcup x.$

(ii) x en y zijn verzamelingen van ordinalen.

$\forall\alpha(\alpha \in x \rightarrow \exists\beta(\beta \in y \wedge \alpha \in \beta)) \rightarrow \bigcup x = \bigcup y \vee \bigcup x \in \bigcup y.$

3. Def.: $f:\alpha \rightarrow \alpha$ is monotoon als $\forall\beta,\gamma\ \beta<\gamma<\alpha \rightarrow f(\beta) \leqslant f(\gamma)$, strikt monotoon als $\forall\beta,\gamma\ \beta<\gamma<\alpha \rightarrow f(\beta) < f(\gamma)$.

(i) Bewijs: f strikt monotoon $\Rightarrow \forall\beta<\alpha\ f(\beta) \geqslant \beta$.

Def.: $f:\alpha \rightarrow \alpha$ is continu als $\forall\beta<\alpha\ f(\beta) = \bigcup_{\gamma\leqslant\beta} f(\gamma)$.

(ii) Bewijs: f continu $\Rightarrow$ f monotoon.

(iii) Zij $f:\alpha \rightarrow \alpha$ continu en α overaftelbaar.

Bewijs: $\exists\beta \in \alpha\ f(\beta) = \beta$.

<u>Hint</u>: beschouw $\bigcup_{n\in\omega} f^n(0)$.

4. Deze opgave telt voor drie. We willen een precies bewijs geven van opg. 5 (iv) en 6 van vorige week, uit de axioma's van ZF. Hiervoor hebben we een versterkte versie van stelling 8.15 (Definitie door Transfiniete Recursie) nodig.

(i) Bewijs gedetailleerd:

Als A welgeordend is en G(x,y) is een <u>totaal</u> <u>functionele</u> formule, i.e. $\forall x\ \exists! y\ G(x,y)$, dan is er precies één functie F met Dom(F) = A zodat

$G(\bar{F}(x),F(x))$.

(ii) opg. 5. (iv)

(iii) opg. 6. Aanwijzing: Werk eerst de simultane definitie van de A_n en B_n, zoals daar gegeven, om tot: z.o.z.

$C_0 = \{< a,b >\}$

$C_{n+1} = (\mathrm{Dom}(C_n) \cup C_n) \times (\mathrm{Ran}(C_n) \cup C_n)$

$C = \bigcup_{n \in \omega} C_n.$

(dus $C_n = A_n \times B_n$ en $C = A \times B$)

<u>Toevoeging</u>: bij opgave 6 (1 mei) moet $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ zijn.

PRAKTIKUM VERZAMELINGENLEER- 15 mei 1974.

1. Opgave 13.16 (syllabus).

2. Bewijs:

(i) $\alpha<\beta \rightarrow \gamma+\alpha<\gamma+\beta$

(ii) $\gamma+\alpha = \gamma+\beta \leftrightarrow \alpha = \beta$

(iii) $\alpha\leqslant\beta \rightarrow \alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$

(iv) $\alpha\leqslant\beta \rightarrow \exists!\gamma(\alpha+\gamma = \beta)$

(v) $n<\omega \wedge \omega\leqslant\alpha \rightarrow n+\alpha = \alpha$

(vi) $\neg\forall\alpha,\beta(\alpha+\beta = \beta+\alpha)$

(vii) $\neg\forall\alpha,\beta,\gamma(\alpha+\gamma = \beta+\gamma \rightarrow \alpha = \beta)$

(viii) $\mathrm{Lim}(\lambda) \rightarrow \mathrm{Lim}(\alpha+\lambda)$

(ix) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$

(x) $\alpha\geqslant\omega \rightarrow \exists!\lambda\ \exists!n(\mathrm{Lim}(\lambda) \wedge \alpha = \lambda+n)$

3. Bewijs:

(i) $\alpha<\beta \wedge \gamma \neq \phi \leftrightarrow \gamma\alpha<\gamma\beta$

(ii) $\gamma\alpha = \gamma\beta \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \alpha = \beta$

(iii) $\neg\forall\alpha,\beta,\gamma(\alpha\gamma = \beta\gamma \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \alpha = \beta)$

(iv) $\alpha\leqslant\beta \rightarrow \alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$

(v) $\alpha \neq 0 \wedge \mathrm{Lim}(\lambda) \rightarrow \mathrm{Lim}(\alpha\lambda)$

(vi) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$

(vii) $\neg\forall\alpha,\beta,\gamma((\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha+\gamma\alpha)$

(viii) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

4. <u>Def</u>. α is een epsilon-ordinaal als $\alpha = \omega^{\alpha}$.

(i) Bewijs: α is epsilon-ordinaal $\rightarrow \mathrm{Lim}(\alpha)$

(ii) Definieer $f(0) = 1$

$$f(n+1) = \omega^{f(n)}$$

$$\alpha = \bigcup_{n<\omega} f(n).$$

Bewijs dat α een epsilon-ordinaal is.

(iii) Bewijs dat α het kleinste epsilon-ordinaal is.

5. Bewijs:

(i) $\alpha<\beta \rightarrow \aleph_{\alpha}<\aleph_{\beta}$

(ii) $\exists\alpha(\aleph_{\alpha} = \alpha)$

z.o.z.

6. Definieer:

$\mathrm{cof}(\beta,\alpha) \iff$ er is een strikt monotoon stijgende $f:\alpha \to \beta$ met

$$\beta = \bigcup_{\gamma<\alpha} (f(\gamma)+1)$$

(spreek uit: β is cofinaal met α)

$\mathrm{cf}(\beta) = \mu\alpha\ \mathrm{cof}(\alpha,\beta)$. (cofinaliteit van β)

Bewijs:

(i) $\mathrm{cf}(\beta)$ is een kardinaal

(ii) $\mathrm{cf}(\beta) \leqslant \beta$.

Definieer: α is regulier als $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$

α is singulier als $\mathrm{cf}(\alpha) \neq \alpha$.

(iii) Construeer een singulier kardinaal.

(iv) Bewijs dat $\aleph_{\alpha+1}$ voor alle α regulier is.

7. Maak opgave 17.3 syllabus.

<u>Errata</u>

Verander in opg. 3 (8 mei) $\bigcup_{\gamma\leqslant\beta} f(\gamma)$ in $\bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma+1)$

en: "α is overaftelbaar" in $\alpha = \aleph_1$.